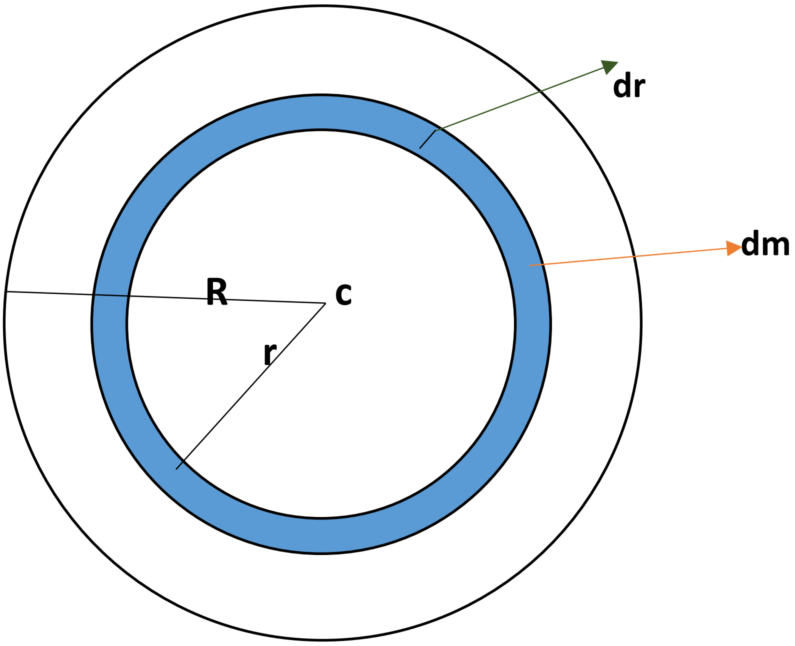
ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΑΣΤΡΟΥ – ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ



Έστω σφαιρικό ομογενές άστρο σταθερής πυκνότητας ρ, ακτίνας R και μάζας M. Θεωρείστε έναν λεπτό φλοιό πάχους dr και μάζας dm σε απόσταση r από το κέντρο του και δείξτε ότι:

1. Η βαρυτική δυναμική ενέργεια του άστρου δίνεται από την εξίσωση

$$\boldsymbol{U = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}}$$

2. Η μάζα dm ασκεί **βαρυτική δύναμη F_g** στα υποκείμενα στρώματα που τείνει να συρρικνώσει το άστρο. Παράλληλα όμως στην dm ασκείται μία αντίθετη δύναμη F_P που οφείλεται στην **πίεση του αερίου, στην πίεση ακτινοβολίας και στην πίεση του εκφυλισμένου αερίου ηλεκτρονίων του πυρήνα.**
Στα σχετικά μικρά αστέρια όπως ο ήλιος μας και στο συντριπτικά μεγαλύτερο μέρος της ζωής του που καίει το υδρογόνο του η παραπάνω πίεση dp στη μάζα dm είναι μόνο **θερμική πίεση του αερίου.** Η εξισορρόπηση της F_g από την F_p εξασφαλίζει τη μη κατάρρευση του άστρου και είναι γνωστή σαν **υδροστατική ισορροπία.** Δείξτε ότι η **θεμελιώδης εξίσωση της υδροστατικής ισορροπίας είναι:**

$$\boldsymbol{\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2}\rho}$$

Όπου m(r) η μάζα σφαίρας ακτίνας r και ρ(r) η μέση πυκνότητά της.

3. Ο ήλιος μας έχει μάζα $M = 2χ10^{30}$ kg , ακτίνα $R = 7x10^{8}$ m , η μέση πυκνότητά του είναι $ρ = 1500$ kgm^{-3} και η ισχύς στην επιφάνειά του $L = 4x10^{26}$ W. Αν $G = 6{,}67x10^{-11}$ $Nm^{2}kg^{-2}$. Βρείτε:

3α) Τη δυναμική ενέργεια που ελευθερώνεται αν ο ήλιος μας συσταλεί σε ακτίνα r = 0.9R. Πόσα χρόνια θα ακτινοβολεί ο ήλιος μας χωρίς θερμοπυρηνική σύντηξη και με σταθερό ρυθμό L J/s με τη χρήση μόνο αυτής της ενέργειας.

3β) Την πίεση P_c στο κέντρο του ήλιου μας αν η μέση πυκνότητά του είναι ρ = 1500 kg/m^3.

3γ) Εφαρμογή της κινητικής θεωρίας των αερίων σε αέριο πλάσμα* δίνει την πίεση του αερίου στο κέντρο του ήλιου μας $P_c = 1{,}69ρN_AkT_c$ όπου $N_A = 6χ10^{23}$ σωματίδια/mole ο αριθμός Avogadro και $k = 1{,}38χ10^{-23}$ JK^{-1} η σταθερά του Boltzmann. Να βρεθεί η θερμοκρασία T_c στο κέντρο του ήλιου μας.

*Ο αριθμός των σωματιδίων N είναι ο αριθμός των ιόντων και των ελεύθερων ηλεκτρονίων.

ΛΥΣΗ

1. Η δυναμική ενέργεια του φλοιού θα είναι **dU =** $-\frac{\boldsymbol{Gm(r)dm}}{\boldsymbol{r}}$(1) όπου m(r) η μάζα που περιλαμβάνεται από την ακτίνα r.

Εφόσον η πυκνότητα είναι σταθερή θα έχουμε: **m(r) =** $\boldsymbol{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}$ **και dm =** $\boldsymbol{\rho 4\pi r^2 dr}$

Έτσι (1) => $dU = -\frac{16}{3}G\pi^2\rho^2r^4dr$ => $U = -\frac{16}{3}G\pi^2\rho^2\int_0^R r^4dr$ **=>** $\boldsymbol{U = -\frac{16}{15}G\pi^2\rho^2R^5}$ **(2)**

Για όλο το άστρο: $\boldsymbol{\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}}$ **(3)**

(2)(3) =>
$$\boldsymbol{U = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}\ (4)}$$

2. $F_g = \frac{Gm(r)dm}{r^2} = \frac{Gm(r)\rho Adr}{r^2}$ (5). Η πίεση του αερίου στον φλοιό θα είναι η διαφορά της προς τα πάνω πίεσης P_1 στο εσωτερικό του φλοιού και της προς το κέντρο πίεσης P_2 με $P_1>P_2$. Έτσι έχουμε μία συνολική πίεση $dP=P_1 – P_2$ προς τα πάνω και μία δύναμη $F_P = - AdP$(6)

Υδροστατική ισορροπία έχουμε όταν $F_g = F_P$ =>(5)(6) $\frac{Gm(r)\rho Adr}{r^2} = - AdP$ =>

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2}\rho \; (7)$$

Να σημειώσουμε ότι η παραπάνω εξίσωση ισχύει για οποιαδήποτε από τις τρείς πιέσεις(θερμική, ακτινοβολίας, εκφυλισμού) ή συνδυασμούς τους και συνοδεύει το αστέρι σε όλη τη διάρκεια της ζωής του, διαταράσσεται επανέρχεται και μόνο στα πολύ μεγάλα αστέρια κυριαρχεί ολοκληρωτικά η βαρύτητα και οδηγούμαστε σε αστρικές μαύρες τρύπες.

3α) (4) => $\Delta U = -\frac{3GM^2}{5x0,9R} + \frac{3GM^2}{5R} = -3GM^2\left(\frac{1}{4,5R} - \frac{1}{5R}\right) = -3GM^2\frac{0,5}{22,5R}$

=> $\boldsymbol{\Delta U = -2,54x10^{41}\ J}$

Παρατηρούμε ότι μία σχετικά μικρή συστολή του ήλιου ελευθερώνει τεράστια ποσά βαρυτικής δυναμικής ενέργειας.

Ο ήλιος μας εκπέμπει $4χ10^{26}$ J ενέργεια σε 1 s , συνεπώς με την ΔU θα μπορούσε να εκπέμπει επί $2,54χ10^{41}/4χ10^{26}$ s = **20 εκατομμύρια χρόνια περίπου.**

3β) (7)=> $dP = -\frac{Gm(r)}{r^2}\rho dr = -\frac{G\rho\frac{4\pi r^3}{3}}{r^2}\rho dr = -\frac{4}{3}G\pi\rho\rho r dr$ **=>**

$P_c = -\frac{4}{3}G\pi\rho\rho\int_R^0 r dr = \frac{4}{3}G\pi\rho\rho\frac{R^2}{2} = \frac{4}{3}G\pi\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\rho\frac{R^2}{2} =>$

$P_c = \frac{GM\rho}{2R}$ **=>** $\boldsymbol{P_c = 1,43x10^{14}\ N/m^2}$ **ή περίπου 1 τρις φορές μεγαλύτερη από την ατμοσφαιρική πίεση στην επιφάνεια της θάλασσας.**

3γ) $1,69\rho N_A k T_c = \frac{GM\rho}{2R}$ **=>** $T_c = \frac{GM}{3,38 NAkR}$ **=>** $\boldsymbol{T_c = 6,8x10^6\ K}$

Δεδομένων των προσεγγίσεων η θερμοκρασία στο κέντρο του ήλιου μας είναι περίπου $15χ10^6$ K.