

Παναγιώτης Μπετσάκος

## Στοιχεία κβαντομηχανικής - Τυπολόγιο για θέματα Β και Γ

### Α. Φως – Φωτόνια (κυματική και σωματιδιακή φύση)

Τα κυματικά μεγέθη:  $\lambda$  (μήκος κύματος, m)

$T$  (περίοδος, s)

$f$  (συχνότητα, Hz)

Τα σωματιδιακά μεγέθη:  $E$  (ενέργεια φωτονίου, J)

$p$  (ορμή φωτονίου, kg·m/s)

Κυματικά και σωματιδιακά μεγέθη:  $c$  (ταχύτητα διάδοσης του φωτός – ταχύτητα φωτονίου, m/s)

$I$  (ένταση ακτινοβολίας,  $J/m^2s=W/m^2$ )

$P$  (ισχύς ακτινοβολίας, W)

Σταθερές :

$h=6,6\cdot 10^{-34}Js$  (σταθερά Planck)

$c=3\cdot 10^8m/s$  (ταχύτητα του φωτός στο κενό)

Οι σχέσεις: 1.  $c = \lambda f = \frac{\lambda}{T}$

(θεμελιώδης εξίσωση κυματικής)

2.  $E = hf = h \frac{c}{\lambda}$

(ενέργεια φωτονίου κατά Planck)

3.  $E_{ολ} = Nhf$

(ολική ενέργεια  $N$  φωτονίων)

4.  $E = pc$

(αναλογική σχέση ενέργειας και ορμής φωτονίου)

5.  $p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$

(αντιστρ. αναλογική σχέση ορμής φωτονίου και μήκους κύματος)

6.  $I = \frac{E_{ολ}}{S \cdot t} = \frac{Nhf}{S \cdot t} = \frac{P}{S}$

(ένταση ακτινοβολίας – εξαρτάται από τη συχνότητά της, αλλά και τον αριθμό φωτονίων που εκπέμπονται ανά μονάδα χρόνου)

Παναγιώτης Μπετσάκος

## B. Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

Τα μεγέθη:  $f_0$  (συχνότητα κατωφλίου, Hz)

$\Phi$  (έργο εξαγωγής, J)

$V$  (τάση ανόδου - καθόδου, V)

$V_0$  (τάση αποκοπής, V)

$K_e$  (μέγιστη κινητική ενέργεια εξερχόμενου ηλεκτρονίου, J)

$i$  (ένταση φωτορεύματος, A)

$\frac{N}{t}$  (αριθμός φωτονίων που προσπίπτουν στην κάθοδο ανά μονάδα χρόνου και αριθμός

ηλεκτρονίων που εξέρχονται από την κάθοδο ανά μονάδα χρόνου, αν κάθε φωτόνιο

απορροφάται από ένα ηλεκτρόνιο)

Οι σχέσεις: 1.  $f_0 = \frac{\Phi}{h}$  (αναλογική σχέση συχνότητας κατωφλίου και έργου εξαγωγής –

εξαρτώνται μόνο από το υλικό της καθόδου)

2.  $K_e = E_\varphi - \Phi = hf - \Phi = \frac{hc}{\lambda} - \Phi = hf - hf_0$  με  $f \geq f_0$  (φωτοηλεκτρική εξίσωση Einstein –

αρχή διατήρησης της ενέργειας)

3.  $K_{\text{τελ}} - K_e = W_{F_{\eta\lambda}} \Rightarrow K_{\text{τελ}} - K_e = eV$  (ΘΜΚΕ για την επιταχυνόμενη κίνηση του

ηλεκτρονίου, υπό τάση  $V$ , μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο)

4.  $K_{\text{τελ}} - K_e = W_{F_{\eta\lambda}} \Rightarrow 0 - K_e = -eV_0 \Rightarrow \underline{K_e = eV_0} \Rightarrow hf - \Phi = eV_0 \Rightarrow$

$V_0 = \frac{hf - \Phi}{e} = \frac{hf}{e} - \frac{\Phi}{e}$  με  $f \geq f_0$  (**α.** σχέση κινητικής ενέργειας εξερχόμενου

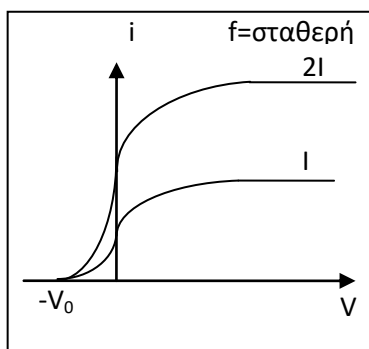
ηλεκτρονίου με την τάση αποκοπής και **β.** σχέση τάσης αποκοπής με τη συχνότητα φωτονίου.

Η τάση αποκοπής εξαρτάται από τη συχνότητα του προσπίπτοντος φωτονίου και το έργο

εξαγωγής του μετάλλου της καθόδου)

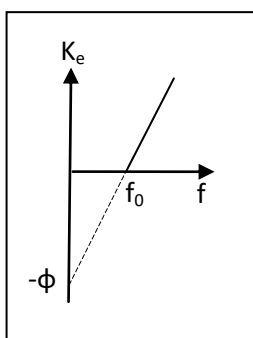
5.  $i = \frac{q}{t} = \frac{Ne}{t}$  (ένταση φωτορεύματος – εξαρτάται από τον αριθμό ηλεκτρονίων που

εξέρχονται από την κάθοδο ανά μονάδα χρόνου,  $N/t$ )

**Τα διαγράμματα: 1.**

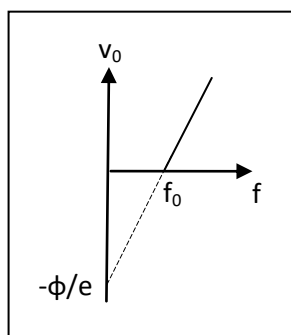
- Διάγραμμα έντασης φωτορεύματος,  $I$  και τάσης ανόδου – καθόδου,  $V$ , για δύο διαφορετικές εντάσεις ακτινοβολίας, με ίδια συχνότητα και διπλάσιο αριθμό φωτονίων πρόσπτωσης ανά μονάδα χρόνου,  $I = \frac{E_{ολ}}{S \cdot t} = \frac{N hf}{t S}$ .
- Η τάση αποκοπής είναι σταθερή, γιατί εξαρτάται από τη συχνότητα του προσπίπτοντος φωτονίου και το έργο εξαγωγής του μετάλλου της καθόδου, που είναι σταθερά.
- Το φωτορεύμα διπλασιάζεται, γιατί διπλασιάζεται ο αριθμός φωτονίων που προσπίπτουν στην κάθοδο ανά μονάδα χρόνου,  $\frac{N}{t}$  και κατά συνέπεια και ο αριθμός ηλεκτρονίων που εξέρχονται από την κάθοδο ανά μονάδα χρόνου (αν κάθε φωτόνιο απορροφάται από ένα ηλεκτρόνιο).

2.



- Διάγραμμα της μέγιστης κινητικής ενέργειας του εξερχόμενου ηλεκτρονίου συναρτήσει της συχνότητας  $f$  της προσπίπτουσας ακτινοβολίας,  $K_e = hf - \phi = hf - hf_0$  με  $f \geq f_0$ .
- Κλίση της ευθείας:  $h$  σταθερά  $h$ .
- Τα ηλεκτρόνια εξέρχονται οριακά για συχνότητα ίση με τη συχνότητα κατωφλίου,  $f_0$ . Η ευθεία αν προεκταθεί στα αρνητικά τέμνει τον άξονα  $y$  σε τιμή με μέτρο ίσο με το έργο εξαγωγής,  $\phi$ .
- Η κινητική ενέργεια δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές, αλλά προεκτείνουμε την ευθεία στα αρνητικά, γιατί έτσι προκύπτει έμμεσα το έργο εξαγωγής,  $\phi$ .

3.



- Διάγραμμα της τάσης αποκοπής συναρτήσει της συχνότητας  $f$  της προσπίπτουσας ακτινοβολίας,  

$$V_0 = \frac{hf - \phi}{e} = \frac{hf}{e} - \frac{\phi}{e} \quad \text{με } f \geq f_0.$$
- Κλίση της ευθείας  $h/e$  σταθερά  $h/e$ .

- Τα ηλεκτρόνια εξέρχονται οριακά για συχνότητα ίση με τη συχνότητα κατωφλίου. Η ευθεία, αν προεκταθεί στα αρνητικά, τέμνει τον άξονα  $y$  σε τιμή με μέτρο ίσο με το έργο εξαγωγής ανά φορτίο ηλεκτρονίου – πειραματική διαδικασία για τον υπολογισμό του έργου εξαγωγής  $\phi$  και της σταθεράς  $h$ , από την κλίση της ευθείας και τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους δύο άξονες).

**Γ. Φαινόμενο Compton**

Τα μεγέθη:  $\lambda$  (μήκος κύματος προσπίπτοντος φωτονίου σε ακίνητο κι ελεύθερο ηλεκτρόνιο, m),

$\lambda'$  (μήκος κύματος σκεδαζόμενου φωτονίου, m),

$E_\phi$  (ενέργεια προσπίπτοντος φωτονίου, J),

$E_{\phi'}$  (ενέργεια σκεδαζόμενου φωτονίου, J),

$K_e$  (κινητική ενέργεια σκεδαζόμενου ηλεκτρονίου μετά τη σκέδαση, J),

$p$  (ορμή προσπίπτοντος φωτονίου, kgm/s),

$p'$  (ορμή σκεδαζόμενου φωτονίου, kgm/s),

$\phi$  (γωνία ανάμεσα στην κατεύθυνση κίνησης των δύο φωτονίων)

Οι σχέσεις: 1.  $\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi)$  (αύξηση του μήκους κύματος στο φωτόνιο ( $\lambda' > \lambda$ ), κατά τη

σκέδαση με ακίνητο ηλεκτρόνιο – συνέπεια αρχής διατήρησης

της ενέργειας και της ΑΔΟ στο σύστημα φωτονίου – ηλεκτρονίου)

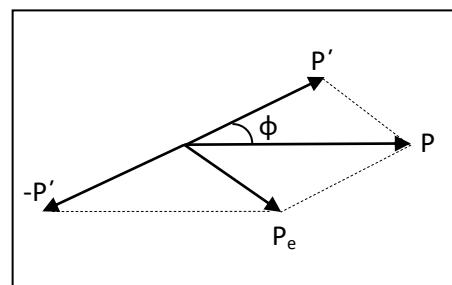
2.  $K_e = E_\phi - E_{\phi'} = hf - hf' = h\frac{c}{\lambda} - h\frac{c}{\lambda'}$  (ΑΔΕ για τη σκέδαση του φωτονίου με ηλεκτρόνιο)

3.  $\vec{p} = \vec{p}_e + \vec{p}' \Rightarrow \vec{p}_e = \vec{p} + (-\vec{p}')$  (ΑΔΟ για τη σκέδαση

του φωτονίου το ηλεκτρόνιο)

4.  $p_e = \sqrt{p^2 + p'^2 + 2pp'\cos(180 - \phi)} \Rightarrow$

$$p_e = \sqrt{p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\phi} \quad \text{με } p = \frac{h}{\lambda} \text{ } p' = \frac{h}{\lambda'}$$



5.  $\lambda_c = \frac{h}{mc} \approx 2,4\text{pm}$  (μήκος κύματος Compton – σταθερά)

6.  $\lambda_{\max}' = \lambda + \frac{2h}{mc}$  (μέγιστο μήκος κύματος σκεδαζόμενου φωτονίου, για σκέδαση

$180^\circ$ , με  $\cos\phi = -1$ )

7.  $K_{e,\max} = E_\phi - E_{\phi,\min}' = h\frac{c}{\lambda} - h\frac{c}{\lambda_{\max}'}$  (μέγιστη κινητική ενέργεια σκεδαζόμενου

ηλεκτρονίου, για σκέδαση  $180^\circ$ )

Παναγιώτης Μπετσάκος

$$8. p_e = p + p' = \frac{h}{\lambda} + \frac{h}{\lambda_{\max}'} = h \frac{\lambda_{\max}' + \lambda}{\lambda \cdot \lambda_{\max}'} \quad (\text{ορμή σκεδαζόμενου ηλεκτρονίου, για σκέδαση } 180^\circ)$$

**ΠΡΟΣΟΧΗ** όταν τα προσπίπτοντα φωτόνια έχουν πολύ μικρό μήκος κύματος (μικρότερο από 0,01nm), τότε το σκεδαζόμενο ηλεκτρόνιο μπορεί να έχει πολύ μεγάλη κινητική ενέργεια και δεν ισχύουν οι

$$\text{σχέσεις της κλασικής φυσικής: } p_e = mv, \quad K_e = \frac{1}{2}mv^2, \quad K_e = \frac{p_e^2}{2m}$$

#### Δ. Κυματική φύση της ύλης κατά Louis de Broglie

Σε κάθε κινούμενο σωματίδιο ορμής  $p$  αντιστοιχεί μήκος κύματος  $\lambda$ .

Οι σχέσεις: 1.  $\lambda = \frac{h}{p}$  (αντιστρόφως αναλογική σχέση ορμής σωματιδίου και μήκους κύματος de Broglie)

$$2. p = mv, \quad K = \frac{1}{2}mv^2, \quad K = \frac{p^2}{2m} \quad (\text{αν η ταχύτητα του σωματιδίου είναι πολύ μικρότερη της}$$

ταχύτητας του φωτός,  $c$ )

#### Ε. Συμπληρωματικές σχέσεις

1.  $\lambda_{\max} T = \text{σταθ.}$  (νόμος Wien για την ακτινοβολία μέλανος σώματος – το μήκος κύματος,  $\lambda_{\max}$ , που αντιστοιχεί στη μέγιστη ένταση ακτινοβολίας και η απόλυτη θερμοκρασία,  $T$ , είναι αντιστρόφως ανάλογα μεγέθη)

2.  $\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{h}{2\pi}$  (η αβεβαιότητα της τιμής της ορμής και θέσης σε κάποιο άξονα έχουν γινόμενο μεγαλύτερο ή ίσο της σταθεράς  $h/2\pi$ )

3.  $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$  (η αβεβαιότητα της τιμής της ενέργειας ενός συστήματος και η χρονική διάρκεια που το σύστημα παραμένει σε μια κατάσταση έχουν γινόμενο μεγαλύτερο ή ίσο της σταθεράς  $h/2\pi$ )

4.  $P = |\Psi|^2 dV$  (η πιθανότητα  $P$  να βρεθεί ένα σωματίδιο σε όγκο  $dV$ , ισούται με το γινόμενο του τετραγώνου του μέτρου της κυματοσυνάρτησης  $\Psi$  επί τον όγκο  $dV$ )

5.  $1eV = 1,6 \cdot 10^{-19} J$  (η μονάδα ενέργειας ηλεκτρονιοβόλτ)

**Μία άσκηση για κάθε ενότητα**

**A.** Δέσμη φωτεινής μονοχρωματικής ακτινοβολίας  $X$ , αποτελείται από  $N=10^{18}$  φωτόνια και εκπέμπεται από μεταλλική επιφάνεια  $S=10\text{cm}^2$  σε χρονικό διάστημα  $t=0,1\text{s}$ . Το μήκος κύματος της ακτινοβολίας είναι  $\lambda=10^{-10}\text{m}$  και η διάδοση γίνεται στο κενό. Να υπολογίσετε:

**α.** τη συχνότητα και την περίοδο της ακτινοβολίας. ( $3\cdot 10^{18}\text{Hz}$ ,  $1/3\cdot 10^{-18}\text{s}$ )

**β.** την ολική ενέργεια της φωτεινής δέσμης. ( $19,8\cdot 10^2\text{J}$ )

**γ.** την ένταση της ακτινοβολίας. ( $19,8\cdot 10^6\text{W/m}^2$ )

**δ.** την ορμή του κάθε φωτονίου. ( $6,6\cdot 10^{-24}\text{kgm/s}$ )

Δίνονται οι σταθερές:  $h=6,6\cdot 10^{-34}\text{Js}$ ,  $c=3\cdot 10^8\text{m/s}$ .

**B.** Στην κάθοδο κυκλώματος φωτοηλεκτρικού φαινομένου προσπίπτουν  $N=10^{16}$  φωτόνια μονοχρωματικού φωτός ανά δευτερόλεπτο, που έχουν ορμή  $p=2,2\cdot 10^{-27}\text{kgm/s}$ . Τα ηλεκτρόνια που εξέρχονται από την κάθοδο έχουν μέγιστη κινητική ενέργεια  $K_{e,\text{max}}=2,75\text{eV}$ . Η διαφορά δυναμικού μεταξύ ανόδου – καθόδου είναι  $V=1\text{V}$ . Να υπολογίσετε:

**α.** τη συχνότητα και το μήκος κύματος της ακτινοβολίας. ( $10^{15}\text{Hz}$ ,  $3\cdot 10^{-7}\text{m}$ )

**β.** τη συχνότητα κατωφλίου και το έργο εξαγωγής του μετάλλου. ( $1/3\cdot 10^{15}\text{Hz}$ ,  $2,2\cdot 10^{-19}\text{J}$ )

**γ.** την ταχύτητα με την οποία φτάνουν τα ταχύτερα ηλεκτρόνια στην άνοδο. ( $\frac{2}{3}\sqrt{3}10^6\frac{\text{m}}{\text{s}}$ )

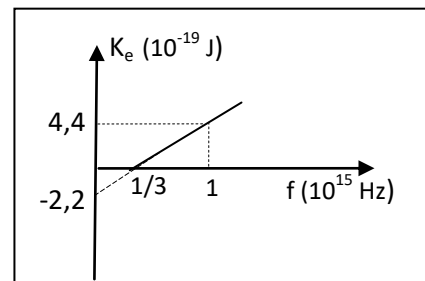
**δ.** την ένταση του φωτορεύματος, αν κάθε φωτόνιο που προσπίπτει στην κάθοδο απορροφάται από ένα ηλεκτρόνιο που απαιτεί την ελάχιστη ενέργεια για να εξέλθει από την κάθοδο. ( $1,6\text{mA}$ )

**ε.** την τάση αποκοπής, αν αναστρέψουμε τη διαφορά δυναμικού ανόδου – καθόδου. ( $2,75\text{V}$ )

**στ.** Να γίνει το διάγραμμα της μέγιστης κινητικής ενέργειας των εξερχόμενων ηλεκτρονίων συναρτήσει της συχνότητας  $f$  της προσπίπτουσας ακτινοβολίας για το συγκεκριμένο μέταλλο.

Δίνονται οι σταθερές:  $h=6,6\cdot 10^{-34}\text{Js}$ ,  $c=3\cdot 10^8\text{m/s}$ ,  $e=1,6\cdot 10^{-19}\text{C}$ ,

$m_e=9\cdot 10^{-31}\text{kg}$ .



Παναγιώτης Μπετσάκος

Γ. Σε πείραμα σκέδασης φωτονίων σε ακίνητα κι ελεύθερα ηλεκτρόνια κάποιου υλικού, τα φωτόνια της προσπίπτουσας ακτινοβολίας έχουν συχνότητα  $f=3 \cdot 10^{20}$  Hz και το σκεδαζόμενο φωτόνιο κινείται σε κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία  $\phi=90^\circ$ , σε σχέση με την αρχική κατεύθυνση του φωτονίου. Να υπολογίσετε:

α. το μήκος κύματος του σκεδαζόμενου φωτονίου. (3,3nm)

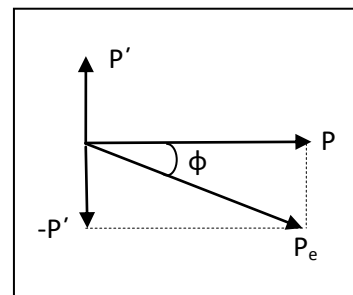
β. την κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου μετά τη σκέδαση. ( $13,8 \cdot 10^{-14}$ J)

γ. το μέτρο και την κατεύθυνση της ορμής του ηλεκτρονίου μετά τη σκέδαση. ( $6,9 \cdot 10^{-22}$  kgm/s,  $\epsilon\phi\phi=1/3,3$ )

δ. το μέγιστο μήκος κύματος του σκεδαζόμενου φωτονίου, αν σκεδαζότανε υπό άλλη γωνία. (5,6nm)

Δίνονται οι σταθερές:  $h=6,6 \cdot 10^{-34}$  Js,  $c=3 \cdot 10^8$  m/s,

$$\lambda_c = \frac{h}{mc} = 2,3 \text{ nm} \quad \text{και} \quad \sqrt{6,6^2 + 2^2} = 6,9.$$



Δ. Μια μπάλα μάζας 100gr προσπίπτει κάθετα σε οριζόντιο δάπεδο, έχοντας κινητική ενέργεια  $K_1=5$ J και μετά την κρούση του, έχει κατακόρυφη ταχύτητα μέτρου  $u_2=5$ m/s. Να υπολογίσετε:

α. το μέτρο της μεταβολής της ορμής της μπάλας. (1,5kgm/s)

β. το μήκος κύματος de Broglie που αντιστοιχεί στη μπάλα πριν την κρούση. ( $6,6 \cdot 10^{-34}$  m)

γ. το ποσοστό μεταβολής του μήκους κύματος της μπάλας κατά την κρούση. (-50%)

δ. τη συχνότητα ενός φωτονίου με ίδιο μήκος κύματος μ' αυτό της μπάλας, πριν την κρούση. Υπάρχουν φωτόνια με τέτοια συχνότητα; ( $0,45 \cdot 10^{42}$  Hz)

Δίνονται οι σταθερές:  $h=6,6 \cdot 10^{-34}$  Js,  $c=3 \cdot 10^8$  m/s.

**Κι ένα ποίημα «κβαντικό»**

Ευτυχώς η ποίηση απεχθάνεται το απόλυτο

Από μικροί μαθαίνουμε σ' έναν κόσμο  
αιτιότητας και σιγουριάς, μα κάποτε  
φτάνουν οι αβεβαιότητες κι αμφιβολίες  
κι αρχίζουν να μπλέκονται στα πόδια μας.

Κι όλο διερωτόμαστε τι δεν υπολογίσαμε,

τι δεν μετρήσαμε σωστά, δικαιολογούμενοι  
πως εγκλωβιστήκαμε σε συστήματα χαοτικά  
κι αγνοώντας τα εγγενή άτοπα της ζωής μας.  
Χανόμαστε μέσα σε καταστάσεις ανύπαρκτες,  
νοσταλγούμε γεγονότα που δεν συνέβησαν ποτέ  
και στο τέλος, βρίσκουμε τις όποιες λύσεις  
στα φυσικά και μεταφυσικά μας προβλήματα  
μέσα σε όνειρα που έχουν ζήσει κάποιοι άλλοι.

Αφήνοντας τη διεγερμένη νεότητα του πάθους  
κι εκπέμποντας το δανεικό φως, γυρίζω απότομα  
στη θαλπωρή της θεμελιώδους μου θέσης,  
αγωνιώντας για τα μέλλοντα, αφού πια γνωρίζω  
ότι για να μάθω την ενέργεια που θα με σώσει  
πρέπει να παραμείνω εδώ για άπειρο χρόνο.

Μέχρι να βλαστήσει η σιγή της σχετικότητας  
μέχρι να καρπίσει η αποδοχή της αγνωσίας μου  
μέχρι ν' αποφύγω την κενή πολυλογία μου  
μέχρι να ξεριζώσω την κούφια περηφάνια μου,  
τα γράμματα που απιθώνω στα χαρτιά μου  
θ' αρνούνται να στέκονται ακίνητα κι υπάκουα  
μέσα στις λέξεις που απερίσκεπτα τα βάζω,  
κινούμενα απροσδιόριστα, αλλάζοντας θέσεις  
κι επιβάλλοντάς μου σωστικά την απόλυτη σιωπή.