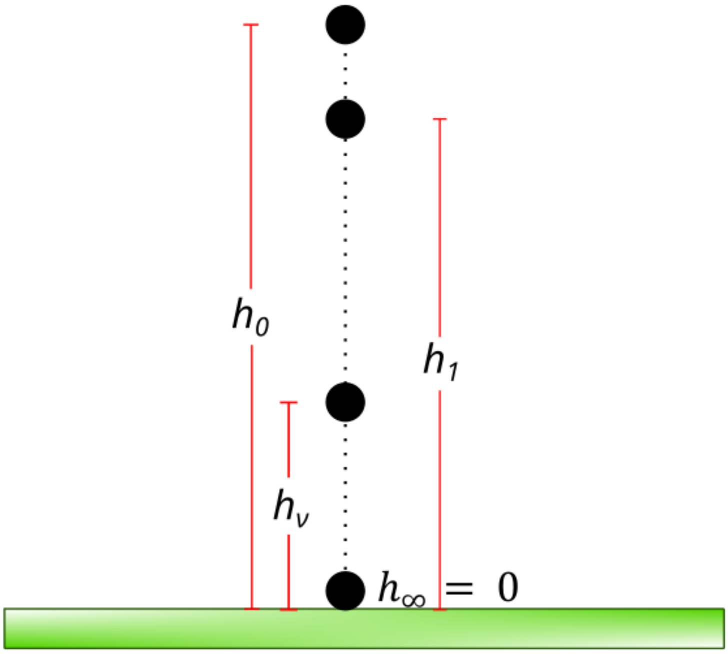
Άπειρες διαδοχικές αναπηδήσεις

Ένα σώμα αμελητέων διαστάσεων, αφήνεται από ύψος h_0 πάνω από το έδαφος και πέφτει ελεύθερα (η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα) σε τόπο όπου το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας είναι ίσο με g. Το σώμα προσκρούει στο έδαφος με ταχύτητα μέτρου υ_0 και αναπηδά με ταχύτητα μέτρου υ_1, τέτοια ώστε $\frac{\upsilon_1}{\upsilon_0} = \beta$, όπου $0 < \beta < 1$. Έτσι, μετά την πρώτη πρόσκρουση, το σώμα φθάνει σε ένα μέγιστο ύψος $h_1 < h_0$ και η διαδικασία επαναλαμβάνεται (ελεύθερη πτώση, πρόσκρουση και αναπήδηση).



Εάν θεωρήσουμε ότι σε κάθε πρόσκρουση ο λόγος του μέτρου της ταχύτητας με την οποία αναπηδά το σώμα προς το μέτρο της αντίστοιχης ταχύτητας με την οποία προσκρούει στο έδαφος είναι σταθερός (δηλαδή εάν κατά τη νιοστή πρόσκρουση ισχύει ότι $\frac{\upsilon_\nu}{\upsilon_{\nu-1}} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_0} = \beta$), να υπολογίσετε:

Α. το συνολικό διάστημα που θα διανύσει το σώμα μέχρι να σταματήσει.

Β. το συνολικό χρόνο κίνησης του σώματος μέχρι να σταματήσει.

Γ. τη μέση τιμή του μέτρου της ταχύτητας του σώματος σε χρονικό διάστημα ίσο με το συνολικό χρόνο κίνησής του.

<u>Αριθμητική εφαρμογή</u>:

$$h_0 = 45m, \quad \beta = 0{,}6, \quad g = 10m/s^2$$

Απάντηση

Επειδή το σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση, κατά την πρώτη του κάθοδο, θα ισχύει ότι:

$$h_0 = \frac{1}{2} g \Delta t_0^2 \Rightarrow \Delta t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

Έτσι, η ταχύτητα με την οποία προσκρούσει για πρώτη φορά στο έδαφος θα είναι ίση με

$$\upsilon_0 = g\Delta t_0 = g\sqrt{\frac{2h_0}{g}} \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{2gh_0}$$

Η φάση της ανόδου του σώματος μετά την πρώτη του πρόσκρουση είναι μία κατακόρυφη βολή (ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_1). Έτσι, θα φθάσει στο αντίστοιχο μέγιστο ύψος h_1 μετά από χρόνο Δt_1 για τον οποίο θα ισχύει ότι

$$0 = \upsilon_1 - g\Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{\upsilon_1}{g}$$

Και το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φθάσει θα είναι ίσο με

$$h_1 = \upsilon_1 \Delta t_1 - \frac{1}{2} g \Delta t_1^2 \Rightarrow h_1 = \frac{\upsilon_1^2}{2g} \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{2gh_1}$$

Ο χρόνος καθόδου τώρα του σώματος από το ύψος h_1 θα είναι ίσος με

$$\Delta t_1' = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{\upsilon_1^2}{2g}}{g}} = \sqrt{\left(\frac{\upsilon_1}{g}\right)^2} = \frac{\upsilon_1}{g} = \Delta t_1$$

Και η ταχύτητα που θα έχει το σώμα πριν από τη δεύτερη πρόσκρουση θα έχει μέτρο ίσο με

$$\upsilon_1' = g\Delta t_1' = g \cdot \frac{\upsilon_1}{g} \Rightarrow \upsilon_1' = \upsilon_1$$

<u>Παρατηρούμε λοιπόν ότι, ο χρόνος ανόδου είναι ίσος με το χρόνο καθόδου κατά την κατακόρυφη βολή και πως το σώμα επιστρέφει στο έδαφος με ταχύτητα ίσου μέτρου με την αντίστοιχη ταχύτητα που αναπήδησε.</u>

Γενικεύοντας, μπορούμε να γράψουμε ότι **η ταχύτητα με την οποία το σώμα προσκρούει στο έδαφος** κατά την τυχαία νιοστή κρούση, είναι ίση με

$$\upsilon_{\nu-1} = \sqrt{2gh_{\nu-1}}$$

και ότι **αναπηδά με ταχύτητα μέτρου**

$$\upsilon_\nu = \sqrt{2gh_\nu}$$

Επίσης, γενικεύοντας, έχουμε ότι **ο χρόνος ανόδου και ο ίσος του χρόνος καθόδου σε μία τυχαία πρόσκρουση** (η άνοδος μετά την πρώτη πρόσκρουση) είναι ίσος με

$$\Delta t_{\nu-1} = \Delta t'_{\nu-1} = \sqrt{\frac{2h_{\nu-1}}{g}} = \frac{\upsilon_{\nu-1}}{g}$$

Από τα παραπάνω, αντιλαμβανόμαστε ότι

$$\boxed{\beta = \frac{\upsilon_\nu}{\upsilon_{\nu-1}} = \frac{\Delta t_\nu}{\Delta t_{\nu-1}} = \sqrt{\frac{h_\nu}{h_{\nu-1}}}} \quad (1)$$

Α. Το συνολικό διάστημα που έχει διανύσει το σώμα από τη στιγμή που αφέθηκε αρχικά ελεύθερο μέχρι και να σταματήσει στο έδαφος, είναι ίσο με:

$$S_{o\lambda} = h_0 + 2h_1 + 2h_2 + 2h_3 + \cdots \quad (2)$$

Από τη σχέση (1) έχουμε ότι

$$h_1 = \beta^2 h_0$$

$$h_2 = \beta^2 h_1 = \beta^4 h_0$$

$$h_3 = \beta^2 h_2 = \beta^6 h_0$$

$$\vdots$$

Έτσι, η σχέση (2) γίνεται

$$S_{o\lambda} = h_0 + 2\beta^2 h_0 + 2\beta^4 h_0 + 2\beta^6 h_0 + \cdots \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow S_{o\lambda} = h_0 + 2\beta^2 h_0 (1 + \beta^2 + \beta^4 + \cdots) \quad (3)$$

Ορίζουμε

$$\Sigma = 1 + \beta^2 + \beta^4 + \cdots$$

Τότε

$$\Sigma = 1 + \beta^2(1 + \beta^2 + \beta^4 + \cdots) \Longrightarrow \Sigma = 1 + \beta^2 \Sigma \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Sigma = \frac{1}{1-\beta^2} \quad (4)$$

Η (3) λόγω της (4) γίνεται

$$S_{o\lambda} = h_0 + \frac{2\beta^2 h_0}{1-\beta^2} \Longrightarrow S_{o\lambda} = h_0\left(1 + \frac{2\beta^2}{1-\beta^2}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{S_{o\lambda} = h_0 \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$$

Β. Ο ζητούμενος ολικός χρόνος κίνησης θα είναι ίσος με

$$\Delta t_{o\lambda} = \Delta t_0 + 2\Delta t_1 + 2\Delta t_2 + 2\Delta t_3 + \cdots \quad (5)$$

Από τη σχέση (1) έχουμε ότι

$$\Delta t_1 = \beta \Delta t_0$$

$$\Delta t_2 = \beta \Delta t_1 = \beta^2 \Delta t_0$$

$$h_3 = \beta \Delta t_2 = \beta^3 \Delta t_0$$

$$\vdots$$

Άρα, η σχέση (5) γίνεται

$$\Delta t_{o\lambda} = \Delta t_0 + 2\beta \Delta t_0 + 2\beta^2 \Delta t_0 + 2\beta^3 \Delta t_0 + \cdots \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Delta t_{o\lambda} = \Delta t_0 + 2\beta \Delta t_0 (1 + \beta + \beta^2 + \cdots) \quad (6)$$

Ορίζουμε

$$\Sigma' = 1 + \beta + \beta^2 + \cdots$$

Τότε

$$\Sigma' = 1 + \beta(1 + \beta + \beta^2 + \cdots) \Longrightarrow \Sigma' = 1 + \beta \Sigma' \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Sigma' = \frac{1}{1-\beta} \quad (7)$$

Η (6) λόγω της (7) γίνεται:

$$\Delta t_{o\lambda} = \Delta t_0 + 2\beta \Delta t_0 \frac{1}{1-\beta} \Longrightarrow \Delta t_{o\lambda} = \Delta t_0 \left(1 + \frac{2\beta}{1-\beta}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Delta t_{o\lambda} = \Delta t_0 \frac{1+\beta}{1-\beta} \Longrightarrow \boxed{\Delta t_{o\lambda} = \sqrt{\frac{2h_0}{g} \cdot \frac{1+\beta}{1-\beta}}}$$

Γ. Η μέση τιμή του μέτρου της ταχύτητας του σώματος στο συνολικό χρονικό διάστημα προκύπτει ίση με:

$$\upsilon_\mu = \frac{S_{o\lambda}}{\Delta t_{o\lambda}} \Longrightarrow \upsilon_\mu = \frac{h_0 \cdot \dfrac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}{\sqrt{\dfrac{2h_0}{g} \cdot \dfrac{1+\beta}{1-\beta}}} = h_0 \sqrt{\frac{g}{2h_0} \cdot \frac{(1+\beta^2)(1-\beta)}{(1-\beta^2)(1+\beta)}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\upsilon_\mu = \sqrt{\frac{g h_0}{2} \cdot \frac{1+\beta^2}{(1+\beta)^2}}}$$

Αριθμητική εφαρμογή:

- Ολικό διάστημα

$$S_{ολ} = 45 \cdot \frac{1 + 0{,}6^2}{1 - 0{,}6^2} m \Rightarrow S_{ολ} = 45 \cdot \frac{1 + 0{,}36}{1 - 0{,}36} m = \frac{1{,}36}{0{,}64} \cdot 45m \Rightarrow \boxed{S_{ολ} = 95{,}625m}$$

- Ολικός χρόνος κίνησης

$$\Delta t_{ολ} = \sqrt{\frac{2 \cdot 45}{10} \cdot \frac{1 + 0{,}6}{1 - 0{,}6}} s \Rightarrow \Delta t_{ολ} = 3 \cdot \frac{1{,}6}{0{,}4} s = 3 \cdot 4s \Rightarrow \boxed{\Delta t_{ολ} = 12s}$$

- Μέση τιμή του μέτρου της ταχύτητας

$$\upsilon_{\mu} = \sqrt{\frac{10 \cdot 45}{2}} \cdot \frac{1 + 0{,}6^2}{(1 + 0{,}6)^2} m/s \Rightarrow \upsilon_{\mu} = 15 \cdot \frac{1 + 0{,}36}{1{,}6^2} m/s \Rightarrow \upsilon_{\mu} = 15 \cdot \frac{1{,}36}{2{,}56} m/s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon_{\mu} = 7{,}96875m/s}$$

Μίλτος Καδιλτζόγλου

miltoskadiltzoglou@gmail.com