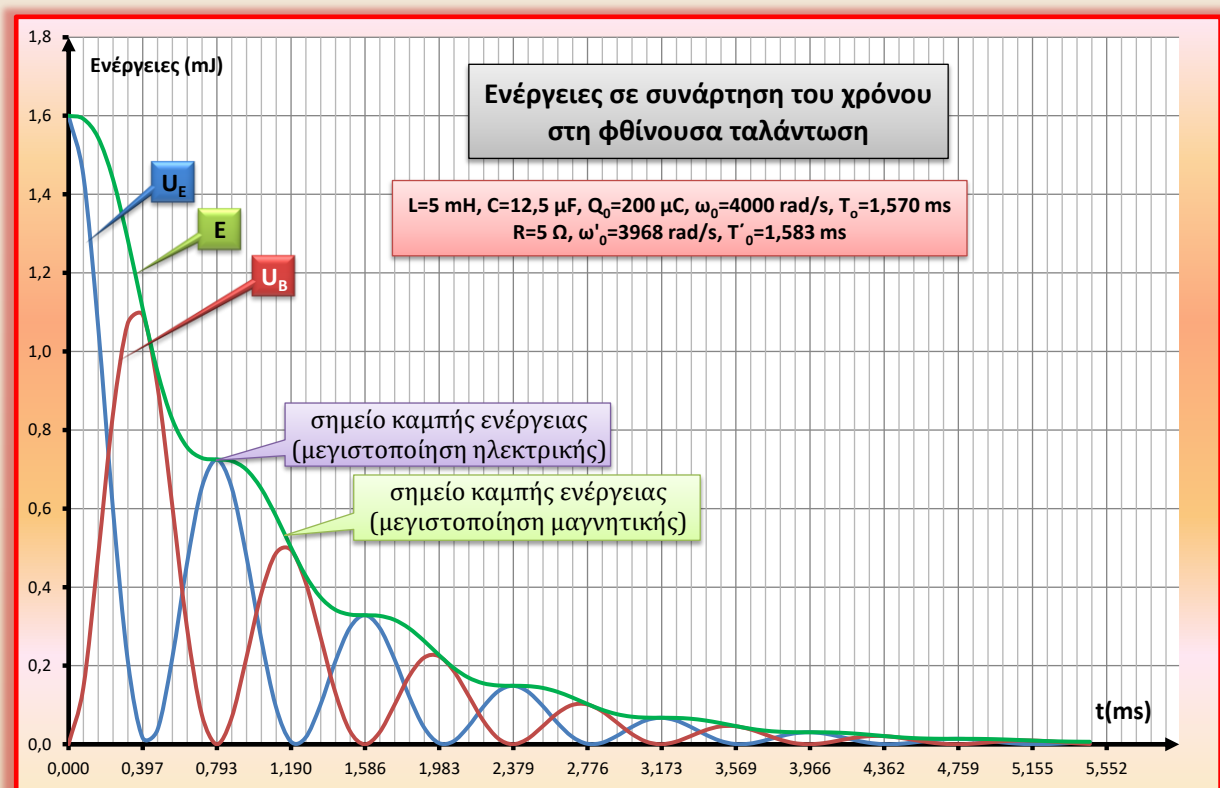


Φθίνουσες Ταλαντώσεις

Εμπεριστατωμένη Παρουσίαση Μηχανικών Και Ηλεκτρικών



«Αναλογίζομαι, πόσο λίγα ξέρω και τρομάζω» Μπέρτολτ Μπρεχτ

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΔΕΡΒΕΝΙΟΥ

Φθινόπωρο 2014–Αναθεώρηση: Φθινόπωρο 2022

Σαράμπαλης Κωνσταντίνος



ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	5
ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ	7
<i>ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ (ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΝΟΜΟΣ NEWTON).....</i>	<i>7</i>
<i>ΥΠΟΚΡΙΣΙΜΗ (ΑΣΘΕΝΗΣ) ΑΠΟΣΒΕΣΗ ($\Lambda < \omega_0 \rightarrow b < 2m\omega_0$).....</i>	<i>8</i>
<i>Η Απομάκρυνση</i>	<i>8</i>
<i>Η Ταχύτητα.....</i>	<i>10</i>
<i>Η Επιτάχυνση.....</i>	<i>11</i>
<i>Οι Δυνάμεις.....</i>	<i>16</i>
<i>Οι Ενέργειες.....</i>	<i>17</i>
<i>Διευκρινίσεις Και Διερεύνηση Σχέσεων</i>	<i>18</i>
<i>Βασικά Συμπεράσματα.....</i>	<i>34</i>
<i>ΚΡΙΣΙΜΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗ ($\Lambda = \omega_0 \rightarrow b = 2\sqrt{mk}$)</i>	<i>36</i>
<i>ΥΠΕΡΑΠΟΣΒΕΣΗ (ΙΣΧΥΡΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗ, $\Lambda > \omega_0 \rightarrow b > 2\sqrt{mk}$).....</i>	<i>37</i>
ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ.....	40
<i>ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ (ΝΟΜΟΣ ΒΡΟΧΩΝ ΚΙΡΧΗΟΦΦ)</i>	<i>40</i>
<i>ΥΠΟΚΡΙΣΙΜΗ (ΑΣΘΕΝΗΣ) ΑΠΟΣΒΕΣΗ ($\Lambda < \omega_0 \rightarrow R < 2\sqrt{L/C}$)</i>	<i>41</i>
<i>ΚΡΙΣΙΜΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗ ($\Lambda = \omega_0 \rightarrow R = 2\sqrt{L/C}$).....</i>	<i>43</i>
<i>ΥΠΕΡΑΠΟΣΒΕΣΗ (ΙΣΧΥΡΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗ, $\Lambda > \omega_0 \rightarrow R > 2\sqrt{L/C}$).....</i>	<i>43</i>
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.....	44
<i>ΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ ΚΑΙ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ.....</i>	<i>44</i>
<i>ΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ ΜΕ (ΑΣΘΕΝΗ, ΚΡΙΣΙΜΗ, ΙΣΧΥΡΗ) ΑΠΟΣΒΕΣΗ, ΧΩΡΙΣ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ.....</i>	<i>46</i>
<i>Ασθενής Απόσβεση</i>	<i>46</i>
<i>Κρίσιμη Απόσβεση.....</i>	<i>52</i>
<i>Υπερκρίσιμη Απόσβεση</i>	<i>52</i>
ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ	55
ΣΥΝΟΨΙΣΗ	65

ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΥΠΟΚΡΙΣΙΜΗΣ ΦΘΙΝΟΥΣΑΣ	72
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	73

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Μια δουλειά (προ) αρκετών ετών παίρνει την τελική (λέω) μορφή της. Πρωτοείδε το φως τμηματικά ως συμπληρώματα των σχεδίων μαθημάτων που δίνονταν παλαιότερα στους μαθητές της Γ τάξης Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης. Τα τελευταία χρόνια αυτό δεν γινόταν, αφού αρκετά φυλλάδια τα έβρισκα πεταμένα ή αφημένα στα θρανία. Πλήρης απαξίωση και απογοήτευση. Άλλωστε η Φυσική μετετράπη, μέσω του εξεταστοκεντρικού συστήματος εκπαίδευσης, σε μια απέραντη και ατελείωτη ασκησιολογία (άθλιων ασκήσεων και συνταγών). Απώλεσε την ομορφιά της. Την ομορφιά του επίπονου ταξιδιού προς διαφανέστερη εικόνα της φύσης. Το επόμενο απόσπασμα δεν αντανακλά αυτό που συμβαίνει σήμερα (και παλαιότερα) στην εκπαίδευση

«Αυτό που έχει ήδη ανακαλυφθεί φαίνεται συχνά πολύ απλό. Την αναζήτηση όμως, που πορεύεται μέσα στα σκοτάδια και διαρκεί χρόνια ολόκληρα, τις εναλλαγές της βεβαιότητας και της απόγνωσης, τις ακατάπαυστες εξάρσεις προς τη διαύγεια – όλα αυτά τα ξέρει μόνο όποιος έχει κάνει αυτή την πορεία» A.Einstein

Δεν περιμένω βέβαια από τους μαθητές των 18 χρόνων να έχουν την προηγούμενη πορεία στη γνώση. Όμως, όποιος δεν οργίστηκε ή δεν «έκλαψε» ποτέ για κάτι που δεν καταλάβαινε μάλλον ξόδεψε τα χρόνια του στο σχολείο ασκόπως.

Δημοσιεύτηκε σε ολοκληρωμένη σχεδόν μορφή σε κάποια σαΐτ φέτος (2014) το καλοκαίρι με αφορμή κάποια προβληματικά θέματα των πανελλαδικών εξετάσεων. Η παρούσα έκδοση ανανεωμένη, συμπληρωμένη, αναδιαρθρωμένη και με λιγότερα (ελπίζω) λάθη δεν αξιώνει τίποτα παραπάνω από μια ματιά στα συμπεράσματα που κομίζει για τη φθίνουσα ταλάντωση με τα τόσα «κρυφά» σημεία και «παρεξηγήσεις». Δεν θέλει να διορθώσει το σχολικό βιβλίο. Αυτό είναι δουλειά άλλων που όμως δεν έχει γίνει.

Τα εισαγωγικά σε κάποιες λέξεις ή φράσεις δηλούν ορισμένες φορές αμφισβητήσεις. Οι επαναλήψεις ορισμένων συμπερασμάτων δεν είναι από αβλεψία.

Αφιερώνεται

σε όλα τα παιδιά που «πέρασαν από τα χέρια μου» και τους έμεινε κάτι από τη μαγεία της Φυσικής και κυρίως στους συνάδελφους Φυσικούς, τωρινούς και μελλοντικούς (Μαρία, Κατερίνα, Θανάση, Αγγελική, Χρήστο, Ρόζα, ...)

σε ένα «παλιόπαιδο» που τόσο με έχει ταλαιπωρήσει και που περισσότερο ενδιαφέρθηκε για την κοινωνική διάσταση και φιλοσοφία της Φυσικής και τον απορρόφησε η πολιτική θεωρία (δεν το θεωρώ κακό)

στο Χάρη με το: «Καλησπέρα δάσκαλε. Παίρνω το θάρρος να σε αποκαλέσω έτσι όχι γιατί μάθαμε Φυσική (σκράπες γαρ) μα γιατί μας έμαθες, έστω και εν αγνοία μας, να αφουγκραζόμαστε την ποίησή της. Με προσμονή για νέες παραγωγικές διαφωνίες σε χαιρετώ και σε ευχαριστώ»

στο Μάχο με το: «..... Ντίνο. Να 'ξερες πόσα μου θύμισες. Πέρασαν 20 χρόνια από τότε που κάτσαμε μαζί στην αίθουσα για τελευταία φορά... Κι όμως είναι σαν χτες»

στον ξενιτεμένο, λόγω τρώικας και μνημονίων, φίλτατο Γιάννη που τα βρόντηξε στο ΕΜΠ συνεχίζοντας Φυσική στο Ανοιχτό Πανεπιστήμιο, ευχόμενος γρήγορη επιστροφή σε μια καινούργια Ελλάδα και

τέλος στην εκκολαπτόμενη χημικό Μαρία Άντζελα της απογοητευτικής περσινής τρίτης για την αναγνώριση με το «παρακολουθώντας τα λίγα μαθήματα που έχουμε κάνει ... και ιδιαίτερα τα μαθήματα φυσικής, είδα ότι έχουν πολλές ομοιότητες με τα μαθήματα που κάναμε στην ώρα σας ...»

Φθινόπωρο 2014

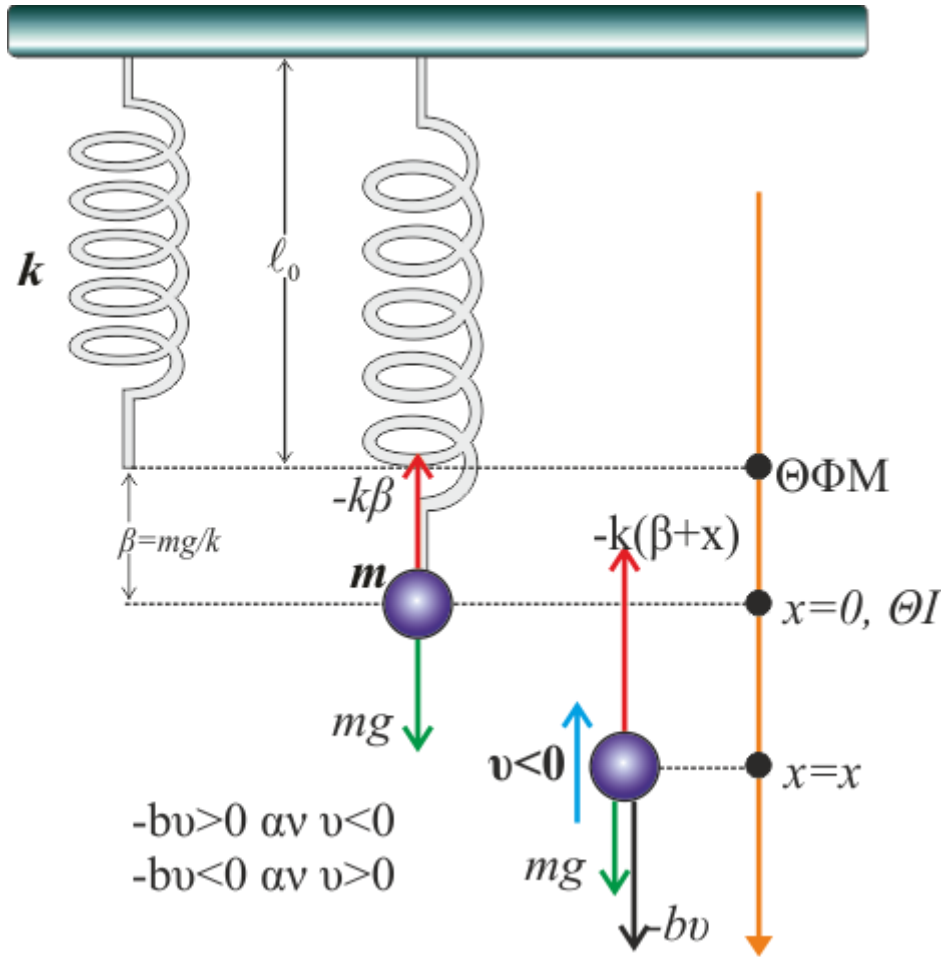
Μια γενική αναθεώρηση το Φθινόπωρο του 2022 (συνταξιούχος πλέον)

Αφιερώνεται στους καλούς συναδέφους Διονύση, Πρόδρομο, Γιώργο και Δημήτρη

Σαράμπαλης Κωνσταντίνος

ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ (ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΝΟΜΟΣ NEWTON)



Σχήμα 1: Σύστημα ελατηρίου μάζας με απόσβεση

Αν το ισορροπών σύστημα «ελατηρίου - μάζας» διεγερθεί (πχ απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας του και αφήνεται ελεύθερο) και υπόκειται σε δύναμη αντίστασης (απόσβεσης), έστω της μορφής $F = -bv = -b \frac{dx}{dt} = -b\dot{x}$ (με μέτρο ανάλογο της ταχύτητας του σώματος και αντίθετης κατεύθυνσης) θα εκτελέσει ταλάντωση, περίξ της θέσης ισορροπίας με μειούμενες μέγιστες αποστάσεις από αυτό. Κάποια στιγμή που απέχει x από τη θέση ισορροπίας του κινείται με ταχύτητα v προς αυτή. Οι ασκούμενες δυνάμεις φαίνονται στο σχήμα και εφαρμόζοντας το 2^ο νευτωνικό νόμο παίρνουμε (β η στατική επιμήκυνση του ελατηρίου, $k\beta = mg$) την εξίσωση κίνησης του σώματος.

$$\begin{aligned} \sum F = ma &\rightarrow F_{\text{επαν.}} + F_{\text{αποσβ.}} = ma \rightarrow \\ -k(x + \beta) - b\dot{x} - mg &= ma \xrightarrow{k\beta=ma} -kx - b\dot{x} = ma \rightarrow ma + b\dot{x} + kx = 0 \rightarrow \\ a + 2\frac{b}{2m}\dot{x} + \frac{k}{m}x &= 0 \rightarrow a + 2\Lambda\dot{x} + \omega_0^2x = 0, \Lambda = \frac{b}{2m}, b \neq 0, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{b}{2m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x &= 0 \rightarrow \ddot{x} + 2\Lambda\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \end{aligned}$$

$$ma + b\dot{x} + kx = 0 \text{ ή } \ddot{x} + 2\Lambda\dot{x} + \omega_0^2x = 0, \text{ όπου } \Lambda = \frac{b}{2m} \neq 0, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Η προκύπτουσα διαφορική εξίσωση είναι γραμμική ομογενής 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές. Η αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 + 2\Lambda\lambda + \omega_0^2 = 0$ έχει ως ρίζες τις $\lambda = -\Lambda \pm \sqrt{\Lambda^2 - \omega_0^2}$. Διακρίνουμε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις, ανάλογα της φύσης των ριζών (συζυγείς μιγαδικές – πραγματική διπλή – πραγματικές διαφορετικές) που εξαρτώνται από την τιμή της σταθεράς απόσβεσης b (Λ).¹²

ΥΠΟΚΡΙΣΙΜΗ (ΑΣΘΕΝΗΣ) ΑΠΟΣΒΕΣΗ ($\Lambda < \omega_0 \rightarrow b < 2m\omega_0$)

Η ΑΠΟΜΑΚΡΥΝΣΗ

Για «μικρές» τιμές της σταθεράς, $\Lambda < \omega_0 \rightarrow b < 2\sqrt{mk} = 2m\omega_0$, οι ρίζες είναι οι συζυγείς μιγαδικές $\lambda = -\Lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2} = -\Lambda \pm i\omega_0'$, όπου $\omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2}$, οπότε η λύση της διαφορικής θα είναι της μορφής

$$x = d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ καταλήγουμε στη μορφή

$$\begin{aligned} x &= d_1 e^{(-\Lambda + i\omega_0')t} + d_2 e^{(-\Lambda - i\omega_0')t} = d_1 e^{-\Lambda t} e^{i\omega_0' t} + d_2 e^{-\Lambda t} e^{-i\omega_0' t} = \\ &= d_1 e^{-\Lambda t} (\cos \omega_0' t + i \sin \omega_0' t) + d_2 e^{-\Lambda t} (\cos \omega_0' t - i \sin \omega_0' t) = \\ &= e^{-\Lambda t} [(d_1 + d_2) \cos \omega_0' t + i(d_1 - d_2) \sin \omega_0' t] = e^{-\Lambda t} [c_1 \cos \omega_0' t + c_2 \sin \omega_0' t] \\ c_1 &= d_1 + d_2, c_2 = i(d_1 - d_2) \end{aligned}$$

¹ Και στις τρεις περιπτώσεις (υποκρίσιμη, κρίσιμη και υπερκρίσιμη), επειδή το πραγματικό μέρος (-Λ) των ριζών είναι αρνητικό, η κίνηση είναι πάντα μεταβατική (φθίνει με το χρόνο).

² Αν b=0 θα πρόκειται για απλή αρμονική ταλάντωση

Συνήθως επειδή ενδιαφερόμαστε για πραγματικές λύσεις η x είναι πραγματική αν και μόνο αν οι σταθερές c_1, c_2 είναι πραγματικές που συμβαίνει μόνο αν οι μιγαδικές σταθερές d_1, d_2 είναι συζυγείς.

$$\begin{pmatrix} d_1 = a + bi \\ d_2 = a - bi \end{pmatrix} \rightarrow c_1 = d_1 + d_2 = 2a \in \mathbb{R}, \quad d_1 - d_2 = 2bi \rightarrow c_2 = i(d_1 - d_2) = -2b \in \mathbb{R}.$$

Έτσι καταλήγουμε στην $x(t) = e^{-\Lambda t} [c_1 \sin(\omega'_0 t) + c_2 \cos(\omega'_0 t)]$ η οποία μπορεί να απλοποιηθεί επιπλέον χρησιμοποιώντας τον τριγωνομετρικό μετασχηματισμό (μπορεί να αποδειχτεί πολύ εύκολα αρκεί να θέσουμε $x = 0$ και $\pi/2$).

$$c_1 \sin x + c_2 \cos x = c \sin(x + \theta_0) = c \cos(x - \phi_0)$$

$$\sin(x + \theta_0) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (x + \theta_0)\right] = \cos\left[(x + \theta_0) - \frac{\pi}{2}\right] = \cos\left[x - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right)\right] = \cos(x - \phi_0), \quad \text{με } \phi_0 \equiv \frac{\pi}{2} - \theta_0$$

$$\text{όπου } c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \tan \theta_0 = \frac{c_2}{c_1} = \cot \phi_0, \quad \sin \theta_0 = \frac{c_2}{c} = \cos \phi_0, \quad \cos \theta_0 = \frac{c_1}{c} = \sin \phi_0$$

$$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

Η τιμή της θ_0 (όπως και της ϕ_0) ανάλογα των τιμών των σταθερών c_1, c_2 μπορεί να βρίσκεται σε ένα από τα 4 τεταρτημόρια του κύκλου.

Έτσι καταλήγουμε στις:

$$x(t) = ce^{-\Lambda t} \sin(\omega'_0 t + \theta_0) = ce^{-\Lambda t} \cos(\omega'_0 t - \phi_0)$$

$$\text{με } \omega'_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2} < \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \Lambda = \frac{b}{2m}, \quad \phi_0 + \theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

Παρατηρήσεις

- ω_0 η γωνιακή συχνότητα της απλής αρμονικής ταλάντωσης που θα εκτελούσε το ίδιο σύστημα (ελεύθερα) αν διεγείροταν, χωρίς απόσβεση, και επειδή εξαρτάται **μόνο** από τη φύση του συστήματος αποκαλείται **γωνιακή ιδιοσυχνότητα (ή φυσική συχνότητα) χωρίς απόσβεση**.
- ω'_0 η γωνιακή συχνότητα μεταβολής του ημιτόνου ή του συνημίτονου (τριγωνομετρικού όρου) και επειδή και αυτή εξαρτάται **μόνο** από τη φύση του συστήματος (όχι από τις αρχικές συνθήκες) την αποκαλούμε **γωνιακή ιδιοσυχνότητα (ή φυσική συχνότητα) με απόσβεση** (του ίδιου συστήματος που προφανώς δεν εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και είναι **πιο «φυσική»** από την προηγούμενη και μικρότερη της) χρησιμοποιώντας το ίδιο σύμβολο με τόνο. **Η ύπαρξη του τριγωνομετρικού όρου (αρμονικού) παράγοντα προσδίδει μια «περιοδικότητα» στην κίνηση** (θα αναλυθεί στις επόμενες παραγράφους).

3. Η σταθερά c (δεν τη λέμε αρχικό πλάτος) και η γωνία θ_0 (ή ϕ_0) του ορίσματος του τριγωνομετρικού όρου (δε συνηθίζεται να τη λέμε αρχική φάση) επηρεάζονται τόσο από τον τρόπο διεγερσης του συστήματος (αρχικές συνθήκες) όσο και από τα χαρακτηριστικά του ταλαντούμενου συστήματος. Για τον προσδιορισμό τους πρέπει να γνωρίζουμε **δύο αρχικές συνθήκες** (όχι υποχρεωτικά τη χρονική στιγμή μηδέν), μία για την x και μια για την πρώτη παραγωγό της, δηλ. την ταχύτητα.

Η γωνία θ_0 (ή ϕ_0) έχει την ίδια σημασία που είχε στην απλή αρμονική ταλάντωση. Εκεί, όπως και δω, δείχνει το μέρος του κύκλου (περιόδου, $\frac{\theta_0}{2\pi}T_0'$) που έχει περάσει αν ταλαντωνόταν από τη στιγμή που βρισκόταν στη θέση ισορροπίας του (που στη φθίνουσα δεν συμπίπτει με τη θέση μέγιστης ταχύτητας, όπως θα δούμε παρακάτω) μέχρι να αρχίσει η ταλάντωση (να διεγερθεί το σύστημα) τη μηδενική χρονική στιγμή και την περιορίζουμε στο πλαίσιο ενός κύκλου (2π ακτίνα). Στο παράδειγμα του βιβλίου (που εκτρέπουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα των x και το αφήνουμε ελεύθερο) η αρχική φάση θα είχε τιμή $\theta_0 = \pi/2$ (ή $\phi_0 = 0$) αν η ταλάντωση γινόταν χωρίς απόσβεση (απλή αρμονική ταλάντωση), ενώ στη φθίνουσα $\theta_0 < \pi/2$. Γενικότερα στο παράδειγμα, εφόσον $(\omega_0', \Lambda) < \omega_0$ συνεπάγεται ότι $\theta_0 \neq n\frac{\pi}{2}$, $n = 1, 2, 3$ (βλέπε και παρακάτω).

4. Δε μεταβάλλεται αρμονικά ή εκθετικά με το χρόνο

Η ΤΑΧΥΤΗΤΑ

Παραγωγίζοντας την $x(t) = ce^{-\Lambda t} \sin(\omega_0' t + \theta_0)$ βρισκουμε

$$\begin{aligned} v(t) &= c \left[e^{-\Lambda t} (-\Lambda) \sin(\omega_0' t + \theta_0) + e^{-\Lambda t} \cos(\omega_0' t + \theta_0) \omega_0' \right] = ce^{-\Lambda t} \left[-\Lambda \sin(\omega_0' t + \theta_0) + \omega_0' \cos(\omega_0' t + \theta_0) \right] = \\ &= ce^{-\Lambda t} \sqrt{\Lambda^2 + \omega_0'^2} \sin(\omega_0' t + \theta_0 + z_0) = ce^{-\Lambda t} \omega_0 \sin(\omega_0' t + \theta_0 + z_0), \text{ με } \tan z_0 = -\frac{\omega_0'}{\Lambda} \end{aligned}$$

Άρα (τα c , θ_0 (ή ϕ_0) προσδιορίζονται βάσει των αρχικών συνθηκών):

$$\begin{aligned} v(t) &= c\omega_0 e^{-\Lambda t} \sin(\omega_0' t + \theta_0 + z_0) = c\omega_0 e^{-\Lambda t} \cos(\omega_0' t - \phi_0 + z_0) \\ \tan z_0 &= -\frac{\omega_0'}{\Lambda}, \quad \sin z_0 = \frac{\omega_0'}{\omega_0}, \quad \cos z_0 = -\frac{\Lambda}{\omega_0}, \quad \phi_0 + \theta_0 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις

1. Η z_0 με $\tan z_0 = -(\omega_0' / \Lambda)$ έχει συγκεκριμένη τιμή που δεν επηρεάζεται από τις αρχικές συνθήκες, αλλά μόνο από τη φύση του συστήματος. Η διαφορά φάσης με την απομάκρυνση δεν είναι $\pi/2$, αλλά z_0 . Θα ήταν αν $\Lambda = 0$ (απλή αρμονική ταλάντωση).
2. Και η ταχύτητα δεν μεταβάλλεται αρμονικά ή εκθετικά με το χρόνο.

Η ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

11/73

Παράγωγιζοντας την ταχύτητα του προηγούμενου εδαφίου βρίσκουμε την επιτάχυνση

$$\begin{aligned} a(t) &= c\omega_0 \left[-\Lambda e^{-\Lambda t} \sin(\omega'_0 t + \theta_0 + z_0) + \omega'_0 e^{-\Lambda t} \cos(\omega'_0 t + \theta_0 + z_0) \right] = \\ &= c\omega_0 e^{-\Lambda t} \sqrt{\Lambda^2 + \omega_0'^2} \sin(\omega'_0 t + \theta_0 + z_0 + \gamma_0), \quad \tan \gamma_0 = -\frac{\omega'_0}{\Lambda} = \tan z_0 \end{aligned}$$

Άρα:

$$a(t) = c\omega_0^2 e^{-\Lambda t} \sin(\omega'_0 t + \theta_0 + 2z_0) = c\omega_0^2 e^{-\Lambda t} \cos(\omega'_0 t - \phi_0 + 2z_0), \quad \tan z_0 = -\frac{\omega'_0}{\Lambda}, \quad \phi_0 + \theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

Παρατηρήσεις

1. Η διαφορά φάσης με την απομάκρυνση δεν είναι π , αλλά $2z_0$. Θα ήταν αν $\Lambda = 0$ (απλή αρμονική ταλάντωση).
2. Και η επιτάχυνση δεν μεταβάλλεται αρμονικά ή εκθετικά με το χρόνο.

Συνοψίζοντας

$$\begin{aligned} x(t) &= ce^{-\Lambda t} \sin(\omega'_0 t + \theta_0) = ce^{-\Lambda t} \cos(\omega'_0 t - \phi_0), \quad \phi_0 + \theta_0 = \frac{\pi}{2} \\ v(t) &= c\omega_0 e^{-\Lambda t} \sin(\omega'_0 t + \theta_0 + z_0) = c\omega_0 e^{-\Lambda t} \cos(\omega'_0 t - \phi_0 + z_0), \quad \tan z_0 = -\frac{\omega'_0}{\Lambda}, \quad \sin z_0 = \frac{\omega'_0}{\omega_0}, \quad \cos z_0 = -\frac{\Lambda}{\omega_0} \\ a(t) &= c\omega_0^2 e^{-\Lambda t} \sin(\omega'_0 t + \theta_0 + 2z_0) = c\omega_0^2 e^{-\Lambda t} \cos(\omega'_0 t - \phi_0 + 2z_0) \end{aligned}$$

Γενική παρατήρηση

Αν υποθέσουμε ότι η σταθερά απόσβεσης είναι πολύ μικρή, τότε $\Lambda \approx 0$, $\omega'_0 \approx \omega_0$ και $e^{-\Lambda t} \approx 1$. Έτσι δεν υπάρχει εκθετικός όρος και η ταλάντωση καθίσταται απλή αρμονική. Το πόσο μικρή πρέπει να είναι η σταθερά απόσβεσης, ώστε να μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση $\omega'_0 \approx \omega_0$, αλλά ταυτόχρονα να κρατάμε τον εκθετικό όρο (με το Λ να είναι πολύ μικρό) με συνέπεια η ταλάντωση να διαιωνίζεται για πολύ χρόνο είναι ένα ερώτημα.

Επαλήθευση της $ma + bv + kx = 0$

$$\begin{aligned}
& m c \omega_0^2 e^{-\Lambda t} \sin(\omega_0' t + \theta_0 + 2z_0) + 2 m \Lambda c \omega_0 e^{-\Lambda t} \sin(\omega_0' t + \theta_0 + z_0) + m \omega_0^2 c e^{-\Lambda t} \sin(\omega_0' t + \theta_0) = \\
& m c e^{-\Lambda t} \omega_0 \left[\omega_0 \sin(\omega_0' t + \theta_0 + 2z_0) + 2 \Lambda \sin(\omega_0' t + \theta_0 + z_0) + \omega_0 \sin(\omega_0' t + \theta_0) \right] = \\
& m c e^{-\Lambda t} \omega_0 \left[\omega_0 \{ \sin(\omega_0' t + \theta_0 + 2z_0) + \sin(\omega_0' t + \theta_0) \} + 2 \Lambda \sin(\omega_0' t + \theta_0 + z_0) \right] = \\
& m c e^{-\Lambda t} \omega_0 \left[\omega_0 \{ \sin(\omega_0' t + \theta_0) \cos 2z_0 + \cos(\omega_0' t + \theta_0) \sin 2z_0 + \sin(\omega_0' t + \theta_0) \} + 2 \Lambda \{ \sin(\omega_0' t + \theta_0) \cos z_0 + \cos(\omega_0' t + \theta_0) \sin z_0 \} \right] \\
& m c e^{-\Lambda t} \omega_0 \left[\omega_0 \{ \sin(\omega_0' t + \theta_0) [\cos^2 z_0 - \sin^2 z_0] + \cos(\omega_0' t + \theta_0) 2 \sin z_0 \cos z_0 + \sin(\omega_0' t + \theta_0) \} + 2 \Lambda \{ \sin(\omega_0' t + \theta_0) \cos z_0 + \cos(\omega_0' t + \theta_0) \sin z_0 \} \right] \\
& m c e^{-\Lambda t} \omega_0 \left[\omega_0 \left\{ \sin(\omega_0' t + \theta_0) \frac{\Lambda^2 - \omega_0'^2}{\omega_0^2} + \cos(\omega_0' t + \theta_0) 2 \frac{\omega_0' - \Lambda}{\omega_0} + \sin(\omega_0' t + \theta_0) \right\} + 2 \Lambda \left\{ \sin(\omega_0' t + \theta_0) \frac{-\Lambda}{\omega_0} + \cos(\omega_0' t + \theta_0) \frac{\omega_0'}{\omega_0} \right\} \right] \\
& m c e^{-\Lambda t} \omega_0 \left[\frac{2 \Lambda^2 - \omega_0'^2}{\omega_0} \sin(\omega_0' t + \theta_0) - 2 \frac{\Lambda \omega_0'}{\omega_0} \cos(\omega_0' t + \theta_0) + \omega_0 \sin(\omega_0' t + \theta_0) + \sin(\omega_0' t + \theta_0) \frac{-2 \Lambda^2}{\omega_0} + \cos(\omega_0' t + \theta_0) \frac{2 \Lambda \omega_0'}{\omega_0} \right] \\
& m c e^{-\Lambda t} \omega_0 \left[\left(\frac{2 \Lambda^2 - \omega_0'^2}{\omega_0} + \omega_0 + \frac{-2 \Lambda^2}{\omega_0} \right) \sin(\omega_0' t + \theta_0) + \left(-2 \frac{\Lambda \omega_0'}{\omega_0} + \frac{2 \Lambda \omega_0'}{\omega_0} \right) \cos(\omega_0' t + \theta_0) \right] = 0
\end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΑΠΟ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Συνήθως, γνωρίζουμε τις τιμές της θέσης (απομάκρυνσης) και της ταχύτητας τη μηδενική χρονική στιγμή, δηλ. τις $x(0)$, $v(0) = \dot{x}(0)$. Έτσι με υπολογισμούς βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}
x(t) &= c e^{-\Lambda t} \sin(\omega_0' t + \theta_0) \rightarrow x(0) = c \sin \theta_0 \rightarrow c = \frac{x(0)}{\sin \theta_0} \\
v(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = c e^{-\Lambda t} (-\Lambda) \sin(\omega_0' t + \theta_0) + c e^{-\Lambda t} \cos(\omega_0' t + \theta_0) \omega_0' \rightarrow \\
v(0) &= -c \Lambda \sin \theta_0 + c \omega_0' \cos \theta_0 = c (-\Lambda \sin \theta_0 + \omega_0' \cos \theta_0) = \\
&= \frac{x(0)}{\sin \theta_0} (-\Lambda \sin \theta_0 + \omega_0' \cos \theta_0) = x(0) (-\Lambda + \omega_0' \cot \theta_0) \rightarrow \cot \theta_0 = \frac{v(0)}{\omega_0' x(0)} + \frac{\Lambda}{\omega_0'} = \frac{v(0) + \Lambda x(0)}{\omega_0' x(0)} \rightarrow \\
\tan \theta_0 &= \frac{\omega_0' x(0)}{v(0) + \Lambda x(0)} \rightarrow \sin \theta_0 = \frac{\tan \theta_0}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta_0}} = \frac{\frac{\omega_0' x(0)}{v(0) + \Lambda x(0)}}{\sqrt{1 + \left[\frac{\omega_0' x(0)}{v(0) + \Lambda x(0)} \right]^2}} = \frac{\omega_0' x(0)}{\sqrt{[\omega_0' x(0)]^2 + [v(0) + \Lambda x(0)]^2}} \\
c &= \frac{x(0)}{\sin \theta_0} = \frac{1}{\omega_0'} \sqrt{[\omega_0' \cdot x(0)]^2 + [\dot{x}(0) + \Lambda \cdot x(0)]^2}
\end{aligned}$$

Άρα και στις τρεις συναρτήσεις οι σταθερές με αυτές τις αρχικές συνθήκες είναι

$$\begin{aligned} \text{ΑΣ: } x(0), v(0) = \dot{x}(0) \\ \tan \theta_0 = \frac{\omega'_0 \cdot x(0)}{v(0) + \Lambda \cdot x(0)} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \phi_0\right) = \cot \phi_0, \quad c = \frac{1}{\omega'_0} \sqrt{[\omega'_0 \cdot x(0)]^2 + [v(0) + \Lambda \cdot x(0)]^2} \\ \sin \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{v(0) + \Lambda \cdot x(0)}{\omega'_0 \cdot x(0)}\right]^2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_0\right) = \cos \phi_0, \quad \phi_0 + \theta_0 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις

1. Εύκολα από τις τελευταίες προκύπτει ότι:

$$\text{αν } b, \Lambda \uparrow \rightarrow \omega'_0 \downarrow: \sin \theta_0 \downarrow, \cos \phi_0 \downarrow \Rightarrow \theta_0 \downarrow \text{ και } \phi_0 \uparrow, \text{ με } \phi_0 + \theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

2. Για $b = 0 \rightarrow \Lambda = 0 \rightarrow \omega'_0 = \omega_0$ παίρνουμε τις αντίστοιχες σχέσεις για την απλή αρμονική ταλάντωση (αναμενόμενο). Ομοίως και στη δεύτερη μορφή.

1^η Εφαρμογή στο παράδειγμα

Αν οι αρχικές συνθήκες είναι οι $[x(0) = 0, \dot{x}(0) = v(0) \neq 0]$, δηλ. το σώμα τη χρονική στιγμή μηδέν ευρισκόμενο στη θέση $x = 0$ ωθείται με γνωστή ταχύτητα, βρισκόμαστε διαδοχικά

$$\begin{aligned} \tan \theta_0 = \frac{\omega'_0 \cdot x(0)}{\dot{x}(0) + \Lambda \cdot x(0)} = 0 \rightarrow \theta_0 = 0 \rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{2} \quad \left(\phi_0 + \theta_0 = \frac{\pi}{2} \right) \\ c = \frac{1}{\omega'_0} \sqrt{[\omega'_0 \cdot x(0)]^2 + [\dot{x}(0) + \Lambda \cdot x(0)]^2} = \frac{\dot{x}(0)}{\omega'_0} = \frac{v(0)}{\omega'_0} \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις διαμορφώνονται ως εξής

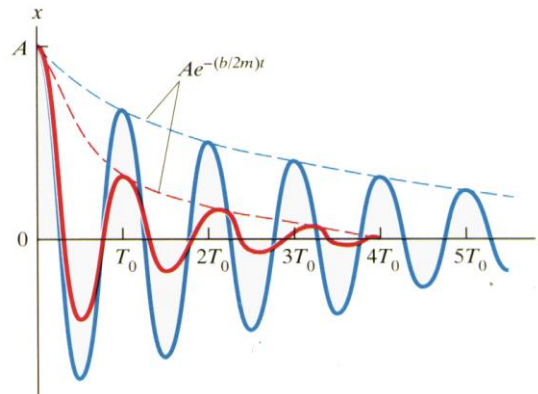
$$\begin{aligned} [x(0) = 0, \dot{x}(0) = v(0) \neq 0] \rightarrow \left(\theta_0 = 0, \phi_0 = \frac{\pi}{2} \right) \text{ και } c = \frac{v(0)}{\omega'_0} \\ x(t) = \frac{v(0)}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \sin(\omega'_0 t) = \frac{v(0)}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \cos\left(\omega'_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \\ v(t) = \frac{v(0)}{\omega'_0} \omega_0 e^{-\Lambda t} \sin(\omega'_0 t + z_0) = \frac{v(0)}{\omega'_0} \omega_0 e^{-\Lambda t} \cos\left(\omega'_0 t - \frac{\pi}{2} + z_0\right), \quad \tan z_0 = -\frac{\omega'_0}{\Lambda} \\ a(t) = \frac{v(0)}{\omega'_0} \omega_0^2 e^{-\Lambda t} \sin(\omega'_0 t + 2z_0) = \frac{v(0)}{\omega'_0} \omega_0^2 e^{-\Lambda t} \cos\left(\omega'_0 t - \frac{\pi}{2} + 2z_0\right) \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις

1. Από τη σύγκριση των σχέσεων προκύπτει ότι η διαφορά φάσης ανάμεσα σε δύο διαδοχικά μεγέθη είναι

$z_0 \neq \pi/2$ με $\tan z_0 = -\frac{\omega'_0}{\Lambda}$. Θα ήταν $\pi/2$ αν $\Lambda = 0$ (απλή αρμονική ταλάντωση).

2^η Εφαρμογή στο παράδειγμα: Αν περιοριστούμε εφεξής στην περίπτωση **(σχολικού βιβλίου)** κατά την οποία (όπως διακρίνεται από το αντίστοιχο σχήμα) απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατά A_0 (αρχική μετατόπιση του σώματος) και το αφήνουμε ελεύθερο την $t=0$, τότε $x(0) = A_0$ και $v(0) = \dot{x}(0) = 0$. Αξιοποιώντας τις προηγούμενες σχέσεις βρίσκουμε:



Σχήμα 2: Φθίνουσες ταλαντώσεις του ίδιου συστήματος για δύο διαφορετικές τιμές της σταθεράς b . Η «περίοδος» αυξάνεται καθώς η b μεγαλώνει

$$c = \frac{A_0}{\omega'_0} \omega_0, \quad \tan \theta_0 = \frac{\omega'_0}{\Lambda} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \phi_0\right) = \cot \phi_0, \quad \sin \theta_0 = \frac{\omega'_0}{\omega_0} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_0\right) = \cos \phi_0$$

$$\cos \theta_0 = \frac{\Lambda}{\omega_0} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi_0\right) = \sin \phi_0, \quad \phi_0 + \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \tan z_0 = -\frac{\omega'_0}{\Lambda} = -\tan \theta_0 = -\cot \phi_0$$

$$\tan z_0 = -\tan \theta_0 = \tan(-\theta_0) \rightarrow z_0 = -\theta_0 \text{ ή } z_0 = \pi - \theta_0 = \pi - \frac{\pi}{2} + \phi_0 = \frac{\pi}{2} + \phi_0, \quad z_0 + \theta_0 = \pi, \quad z_0 - \phi_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \sin(\omega'_0 t + \theta_0) = A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \cos(\omega'_0 t - \phi_0)$$

Παρατήρηση: Αν το A_0 του βιβλίου (σχήμα 1-21) δεν είναι η αρχική απομάκρυνση, τότε

$$A_0 = x(0) \frac{\omega_0}{\omega'_0}. \text{ Αν } \omega_0 / \omega'_0 \approx 1: A_0 \approx x(0)$$

$$\begin{aligned} v(t) &= A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} \omega_0 e^{-\Lambda t} \sin(\omega'_0 t + \theta_0 + z_0) = A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} \omega_0 e^{-\Lambda t} \sin(\omega'_0 t + \theta_0 + \pi - \theta_0) = -A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} \omega_0 e^{-\Lambda t} \sin(\omega'_0 t) \\ &= A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} \omega_0 e^{-\Lambda t} \cos(\omega'_0 t - \phi_0 + z_0) = A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} \omega_0 e^{-\Lambda t} \cos(\omega'_0 t - \phi_0 + \pi - \theta_0) = A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} \omega_0 e^{-\Lambda t} \cos\left(\omega'_0 t - \phi_0 + \pi - \frac{\pi}{2} + \phi_0\right) = \\ &= A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} \omega_0 e^{-\Lambda t} \cos\left(\omega'_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$a(t) = A_0 \frac{\omega_0}{\omega_0'} \omega_0^2 e^{-\Lambda t} \sin(\omega_0' t + \theta_0 + 2(\pi - \theta_0)) = A_0 \frac{\omega_0}{\omega_0'} \omega_0^2 e^{-\Lambda t} \sin(\omega_0' t - \theta_0)$$

$$A_0 \frac{\omega_0}{\omega_0'} \omega_0^2 e^{-\Lambda t} \cos(\omega_0' t - \phi_0 + 2z_0) = A_0 \frac{\omega_0}{\omega_0'} \omega_0^2 e^{-\Lambda t} \cos\left(\omega_0' t - \phi_0 + 2\left(\frac{\pi}{2} + \phi_0\right)\right) = A_0 \frac{\omega_0}{\omega_0'} \omega_0^2 e^{-\Lambda t} \cos(\omega_0' t + \phi_0 + \pi) =$$

$$= -A_0 \frac{\omega_0}{\omega_0'} \omega_0^2 e^{-\Lambda t} \cos(\omega_0' t + \phi_0)$$

Συνοψίζοντας

$$\left[x(0) = A_0 \text{ και } v(0) = \dot{x}(0) = 0 \right] \rightarrow \left[c = \frac{A_0}{\omega_0'} \omega_0, \phi_0 + \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \tan \theta_0 = \frac{\omega_0'}{\Lambda} = \cot \phi_0 \right]$$

$$\sin \theta_0 = \frac{\omega_0'}{\omega_0} = \cos \phi_0, \cos \theta_0 = \frac{\Lambda}{\omega_0} = \sin \phi_0$$

$$x(t) = A_0 \frac{\omega_0}{\omega_0'} e^{-\Lambda t} \sin(\omega_0' t + \theta_0) = A_0 \frac{\omega_0}{\omega_0'} e^{-\Lambda t} \cos(\omega_0' t - \phi_0)$$

$$v(t) = -A_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0'} e^{-\Lambda t} \sin(\omega_0' t) = A_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0'} e^{-\Lambda t} \cos\left(\omega_0' t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a(t) = A_0 \frac{\omega_0^3}{\omega_0'} e^{-\Lambda t} \sin(\omega_0' t - \theta_0) = -A_0 \frac{\omega_0^3}{\omega_0'} e^{-\Lambda t} \cos(\omega_0' t + \phi_0)$$

Από την $\cos \theta_0 = \Lambda / \omega_0$ για την πρώτη μορφή φαίνεται ότι αν το Λ μεγαλώνει το ίδιο συμβαίνει και με το συνημίτονο και η θ_0 μικραίνει (και η $\phi_0 = \pi/2 - \theta_0$ μεγαλώνει). Αν $\Lambda = 0$ τότε $\cos \theta_0 = 0 = \sin \phi_0$ και $\theta_0 = \pi/2$, $\phi_0 = 0$ (μεταπίπτουμε σε απλή αρμονική ταλάντωση).

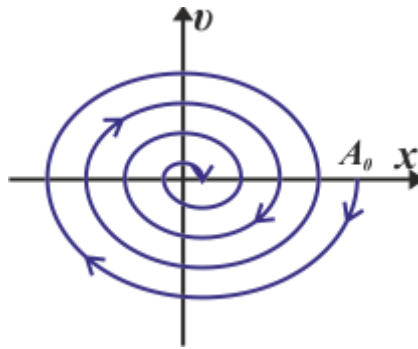
Επαλήθευση της $ma + b\dot{v} + kx = 0$

$$mA_0 \frac{\omega_0^3}{\omega_0'} e^{-\Lambda t} \sin(\omega_0' t - \theta_0) - 2\Lambda mA_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0'} e^{-\Lambda t} \sin(\omega_0' t) + m\omega_0^2 A_0 \frac{\omega_0}{\omega_0'} e^{-\Lambda t} \sin(\omega_0' t + \theta_0) =$$

$$mA_0 e^{-\Lambda t} \frac{\omega_0}{\omega_0'} \left[\omega_0^2 \sin(\omega_0' t - \theta_0) - 2\Lambda \omega_0 \sin(\omega_0' t) + \omega_0^2 \sin(\omega_0' t + \theta_0) \right] =$$

$$mA_0 e^{-\Lambda t} \frac{\omega_0}{\omega_0'} \left[\omega_0^2 \{ \sin(\omega_0' t - \theta_0) + \sin(\omega_0' t + \theta_0) \} - 2\Lambda \omega_0 \sin(\omega_0' t) \right] =$$

$$mA_0 e^{-\Lambda t} \frac{\omega_0}{\omega_0'} \left[\omega_0^2 2 \sin \omega_0' t \cos \theta_0 - 2\Lambda \omega_0 \sin(\omega_0' t) \right] = mA_0 e^{-\Lambda t} \frac{\omega_0}{\omega_0'} \left[2\omega_0^2 \sin(\omega_0' t) \frac{\Lambda}{\omega_0} - 2\Lambda \omega_0 \sin(\omega_0' t) \right] = 0$$



Σχήμα 3: Χώρος των φάσεων (η ταχύτητα σε συνάρτηση της απομάκρυνσης). Από την έλλειψη της απλής αρμονικής ταλάντωσης, στη σπείρα, όπως «κατάντησε» από την απόσβεση, της φθίνουσας,

ΟΙ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

1. Η δύναμη **επαναφοράς** υπολογίζεται από τη σχέση

$$F_k(t) = -kx(t) = -m\omega_0^2 c e^{-\Lambda t} \sin(\omega_0' t + \theta_0) = -m\omega_0^2 c e^{-\Lambda t} \cos(\omega_0' t - \phi_0), \quad \phi_0 + \theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$F_k(t) = -kx(t) = -m\omega_0^2 A_0 \frac{\omega_0}{\omega_0'} e^{-\Lambda t} \sin(\omega_0' t + \theta_0) = -mA_0 \frac{\omega_0^3}{\omega_0'} e^{-\Lambda t} \sin(\omega_0' t - \phi_0), \quad \tan \theta_0 = \frac{\omega_0'}{\Lambda} = \cot \phi_0$$

2. Η δύναμη **απόσβεσης** υπολογίζεται από τη σχέση

$$F_b(t) = -bv(t) = -2m\Lambda c \omega_0 e^{-\Lambda t} \sin(\omega_0' t + \theta_0 + z_0) = -2m\Lambda c \omega_0 e^{-\Lambda t} \cos(\omega_0' t - \phi_0 + z_0), \quad \tan z_0 = -\frac{\omega_0'}{\Lambda}$$

$$F_b(t) = -bv(t) = 2m\Lambda A_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0'} e^{-\Lambda t} \sin(\omega_0' t) = -2m\Lambda A_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0'} e^{-\Lambda t} \cos\left(\omega_0' t + \frac{\pi}{2}\right), \quad \tan \theta_0 = \frac{\omega_0'}{\Lambda} = \cot \phi_0 = -\tan z_0$$

3. Η **συνολικά** ασκούμενη δύναμη υπολογίζεται από τη σχέση (ή με το άθροισμα των δύο προηγούμενων)

$$F_{\text{ολ}}(t) = ma(t) = mc\omega_0^2 e^{-\Lambda t} \sin(\omega_0' t + \theta_0 + 2z_0) = mc\omega_0^2 e^{-\Lambda t} \cos(\omega_0' t - \phi_0 + 2z_0), \quad \phi_0 + \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \tan z_0 = -\frac{\omega_0'}{\Lambda}$$

$$\left(\begin{array}{l} F_{\text{ολ}}(t) = ma(t) = mA_0 \frac{\omega_0^3}{\omega_0'} e^{-\Lambda t} \sin(\omega_0' t - \theta_0) = -mA_0 \frac{\omega_0^3}{\omega_0'} e^{-\Lambda t} \cos(\omega_0' t + \phi_0), \quad z_0 + \theta_0 = \pi \\ \tan \theta_0 = \frac{\omega_0'}{\Lambda} = \cot \phi_0 = -\tan z_0 \end{array} \right)$$

Προφανώς καμία από τις τρεις δεν μεταβάλλεται αρμονικά ή εκθετικά με το χρόνο.

ΟΙ ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ

17/73

1. Η **Δυναμική** ενέργεια δίνεται από τη σχέση:

$$U(t) = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kc^2 e^{-2\Lambda t} \sin^2(\omega'_0 t + \theta_0) = \frac{1}{2} kc^2 e^{-2\Lambda t} \cos^2(\omega'_0 t - \phi_0), \quad \phi_0 + \theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\left(\begin{array}{l} U(t) = \left(\frac{1}{2} kA_0^2\right) \frac{\omega_0^2}{\omega_0'^2} e^{-2\Lambda t} \sin^2(\omega'_0 t + \theta_0) = \left(E_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0'^2}\right) e^{-2\Lambda t} \sin^2(\omega'_0 t + \theta_0) = \left(E_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0'^2}\right) e^{-2\Lambda t} \cos^2(\omega'_0 t - \phi_0) \text{ με} \\ \tan \theta_0 = \frac{\omega_0'}{\Lambda} = \cot \phi_0 \end{array} \right)$$

2. Η **κινητική** ενέργεια δίνεται από τη σχέση:

$$\left(\begin{array}{l} K(t) = \frac{1}{2} m\omega^2 = \frac{1}{2} mc^2 \omega_0'^2 e^{-2\Lambda t} \sin^2(\omega'_0 t + \theta_0 + z_0) = \frac{1}{2} mc^2 \omega_0'^2 e^{-2\Lambda t} \cos^2(\omega'_0 t - \phi_0 + z_0) \\ \text{με } \phi_0 + \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \tan z_0 = -\frac{\omega_0'}{\Lambda} = -\tan \theta_0 = -\cot \phi_0 \end{array} \right)$$

$$K(t) = \frac{1}{2} m\omega^2 = \left(\frac{1}{2} kA_0^2\right) \frac{\omega_0^2}{\omega_0'^2} e^{-2\Lambda t} \sin^2(\omega'_0 t) = \left(E_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0'^2}\right) e^{-2\Lambda t} \sin^2(\omega'_0 t) = \left(E_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0'^2}\right) e^{-2\Lambda t} \cos^2\left(\omega'_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

3. Η **ολική** ενέργεια δίνεται από τη σχέση:

$$\left(\begin{array}{l} E(t) = U(t) + K(t) = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 = U(t) + K(t) = \frac{1}{2} kc^2 e^{-2\Lambda t} \left[\sin^2(\omega'_0 t + \theta_0) + \sin^2(\omega'_0 t + \theta_0 + z_0) \right] \\ \text{με } \phi_0 + \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \tan z_0 = -\frac{\omega_0'}{\Lambda} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} E(t) = \left(E_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0'^2}\right) e^{-2\Lambda t} \sin^2(\omega'_0 t + \theta_0) + \left(E_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0'^2}\right) e^{-2\Lambda t} \sin^2(\omega'_0 t) = \left(E_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0'^2}\right) e^{-2\Lambda t} \left[\sin^2(\omega'_0 t + \theta_0) + \sin^2(\omega'_0 t) \right] \\ \text{με } \tan \theta_0 = \cot \phi_0 = \frac{\omega_0'}{\Lambda} = -\tan z_0 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \sin^2(\omega_0't + \theta_0) + \sin^2(\omega_0't) &= \frac{1 - \cos 2(\omega_0't + \theta_0) + 1 - \cos(2\omega_0't)}{2} = 1 - \frac{\cos 2(\omega_0't + \theta_0) + \cos 2\omega_0't}{2} = \\ &= 1 - \frac{2 \cos \left[\frac{2(\omega_0't + \theta_0) + 2\omega_0't}{2} \right] \cos \left[\frac{2(\omega_0't + \theta_0) - 2\omega_0't}{2} \right]}{2} = 1 - \cos(2\omega_0't + \theta_0) \cos \theta_0 = \\ &= 1 - \frac{\Lambda}{\omega_0} \cos(2\omega_0't + \theta_0) = 1 - \frac{\Lambda}{\omega_0} \sin \left[\frac{\pi}{2} - (2\omega_0't + \theta_0) \right] = 1 - \frac{\Lambda}{\omega_0} \sin(\phi_0 - 2\omega_0't) = 1 + \frac{\Lambda}{\omega_0} \sin(2\omega_0't - \phi_0) \end{aligned}$$

$$E(t) = \frac{1}{2} kc^2 e^{-2\Lambda t} \left[1 - \frac{\Lambda}{\omega_0} \cos(2\omega_0't + \theta_0) \right] = \frac{1}{2} kc^2 e^{-2\Lambda t} \left[1 + \frac{\Lambda}{\omega_0} \sin(2\omega_0't - \phi_0) \right], \quad \theta_0 + \phi_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$E(t) = E_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0'^2} e^{-2\Lambda t} \left[1 - \frac{\Lambda}{\omega_0} \cos(2\omega_0't + \theta_0) \right] = E_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0'^2} e^{-2\Lambda t} \left[1 + \frac{\Lambda}{\omega_0} \sin(2\omega_0't - \phi_0) \right], \quad \text{με } \tan \theta_0 = \frac{\omega_0'}{\Lambda} = \cot \phi_0$$

Παρατήρηση: Ούτε οι ενέργειες μεταβάλλονται αρμονικά ή εκθετικά με το χρόνο. Όλα τα μεγέθη «ταλαντεύονται», λόγω του τριγωνομετρικού όρου και συνολικά μειώνονται μέχρι μηδενισμού τους.

ΔΙΕΥΚΡΙΝΙΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΧΕΣΕΩΝ

Συνεχίζουμε με την περίπτωση του βιβλίου κατά την οποία η αρχική απομάκρυνση είναι A_0 και η αρχική ταχύτητα μηδενική. Με αυτές τις αρχικές συνθήκες για τις σταθερές βρήκαμε $c = A_0 \frac{\omega_0}{\omega_0'}$ και

$$\tan \theta_0 = \frac{\omega_0'}{\Lambda} = \cot \phi_0.$$

1. Η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας (κάτι αντίστοιχο συμβαίνει με την ταχύτητα, την επιτάχυνση, κλπ) για $A < \omega_0$ ή $b < 2\sqrt{mk} = 2m\omega_0$, δηλ για **μικρές αποσβέσεις**, είναι ίση με ένα γινόμενο δύο παραγόντων. Ο πρώτος « $A(t) = A_0 \frac{\omega_0}{\omega_0'} e^{-\Lambda t}$ » μειώνεται εκθετικά με το χρόνο και καταχρηστικώς (αφού δεν είναι σταθερός χρονικά), χωρίς το πηλίκο των γωνιακών συχνοτήτων, τον ονομάζουμε «**πλάτος**»⁴. Ο δεύτερος $\sin(\omega_0't + \theta_0)$ είναι αρμονικά μεταβαλλόμενος με γωνιακή συχνότητα

$$^3 \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a, \quad \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

⁴ Εκτός και το A_0 του $A_0 e^{-\Lambda t}$ είναι σταθερά που πρέπει να προσδιοριστεί από τις αρχικές συνθήκες, αλλά τότε ο δείκτης του είναι άνευ νοήματος.

$\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2} < \omega_0 = \sqrt{k/m}$ και είναι αυτός που αποδίδει περιοδικότητα στην όλη κίνηση. Από τη 19/73 σχέση του πλάτους τη χρονική στιγμή μηδέν παίρνουμε $A(0) = A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \geq A_0$, που είναι μεγαλύτερη από την αρχική απομάκρυνση «πλάτος A_0 », διότι πρέπει να συνδυαστεί και με το ακολουθούν ημίτονο $\sin \theta_0 = \omega'_0 / \omega_0$, εκτός και $\omega'_0 = \omega_0$, $b = 0$, $\Lambda = 0$, αλλά τότε πρόκειται για ταλάντωση χωρίς απόσβεση).

2. Η κίνηση του σώματος είναι **ταλάντωση**, αφού το σώμα κινείται παλινδρομικά γύρω από τη θέση ισορροπίας ($x = 0$), **δεν είναι όμως αρμονική** και προφανώς **δεν είναι ούτε περιοδική**, αφού δεν επαναλαμβάνεται, σύμφωνα με τον ορισμό, ακριβώς η ίδια, μιας και το λεγόμενο «πλάτος, $A(t) = A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda t}$ » μειώνεται εκθετικά με το χρόνο.

3. Η ταχύτητα μηδενίζεται όταν

$$\text{μηδενισμός ταχύτητας και μεγιστοποίηση απολύτως της απομάκρυνσης}$$

$$\sin(\omega'_0 t) = 0 \rightarrow \omega'_0 t = n\pi \rightarrow t = n \frac{T'_0}{2}, \quad n \in N = 0, 1, 2, \dots, \text{ με } T'_0 = \frac{2\pi}{\omega'_0}$$

δηλ. τις χρονικές στιγμές που είναι ακέραια πολλαπλάσια της ημιπεριόδου. Αυτό σημαίνει ότι τις ίδιες χρονικές στιγμές (μηδενισμός της ταχύτητας που είναι η πρώτη παράγωγος της απομάκρυνσης) η απομάκρυνση εμφανίζει τοπικά ακρότατα (απολύτως μέγιστα, το σώμα φτάνει σε ακραία θέση στην οποία μηδενίζεται η ταχύτητά του σταματώντας στιγμιαία και στη συνέχεια αντιστρέφει την κίνησή του), που είναι τα

$$x_{\max} = x\left(n \frac{T'_0}{2}\right) = A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda n \frac{T'_0}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T'_0} n \frac{T'_0}{2} + \theta_0\right) = A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda n \frac{T'_0}{2}} \sin(n\pi + \theta_0) =$$

$$= A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda n \frac{T'_0}{2}} [\pm \sin(\theta_0)] = \pm A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda n \frac{T'_0}{2}} \frac{\omega'_0}{\omega_0} = \pm A_0 e^{-\Lambda n \frac{T'_0}{2}}, \quad n \in N$$

$$x_{\max} = x\left(n \frac{T'_0}{2}\right) = \pm A_0 e^{-\Lambda n \frac{T'_0}{2}}, \quad n \in N, \text{ για } n = \begin{cases} \text{άρτιο} \rightarrow x_{\max} > 0 \\ \text{περιττό} \rightarrow x_{\max} < 0 \end{cases}$$

Από τα προηγούμενα συνάγεται ότι οι καμπύλες $(\pm) A_0 e^{-\Lambda t}$ που εκφράζουν το λεγόμενο πλάτος τέμνονται (κοινά σημεία) με την $x = x(t)$ τις χρονικές στιγμές που είναι ακέραια πολλαπλάσια της ημιπεριόδου και κατά τις οποίες το σώμα φτάνει σε ακραίες θέσεις (τοπικά απολύτως μέγιστες τιμές της απομάκρυνσης). Με άλλα λόγια οι συναρτήσεις $(\pm) A_0 e^{-\Lambda t}$ έχουν κοινά σημεία με την $x = x(t)$ που είναι τα τοπικά μέγιστα της τελευταίας.

Αν περιοριστούμε στα θετικά μέγιστα (προς την ίδια κατεύθυνση με την αρχική απομάκρυνση), τότε για τα «πλάτη» της ταλάντωσης μπορούμε να γράψουμε

$$0 < x_{\max} = x(nT'_0) = A_0 e^{-\Lambda n T'_0}, \quad n \in N$$

4. Ανιχνεύουμε αν υπάρχουν και άλλα σημεία τομής στις προηγούμενες συναρτήσεις. Ας προσδιορίσουμε τις χρονικές στιγμές που

$$x(t) = A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} \cdot e^{-\Lambda t} \cos(\omega'_0 t - \phi_0) = \pm A_0 e^{-\Lambda t}$$

Από αυτή προκύπτει η:

$$\cos(\omega'_0 t - \phi_0) = \pm \frac{\omega'_0}{\omega_0} = \begin{pmatrix} +\cos \phi_0 \\ -\cos \phi_0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \omega'_0 t - \phi_0 = 2n\pi \pm \phi_0 \\ \omega'_0 t - \phi_0 = 2n\pi \pm (\pi + \phi_0) \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} t = n \frac{T'_0}{2} \\ t = n \frac{T'_0}{2} + \frac{\phi_0}{\pi} T'_0 \end{pmatrix}, n \in N$$

Δηλ. η $x(t)$ και οι $(\pm) A_0 e^{-\Lambda t}$ τέμνονται τις $t = n \frac{T'_0}{2}$, $n \in N$ (γνωστό) που μεγιστοποιείται (απολύτως) η απομάκρυνση, αλλά και τις $t = n \frac{T'_0}{2} + \frac{\phi_0}{\pi} T'_0$, $n \in N$, δηλ. λίγο μετά τις προηγούμενες στιγμές (**2 κοινά σημεία την 3^η, 6^η, 9^η, κλπ ημιπερίοδο με $x > 0$**). Έτσι στα διαστήματα $\left(n \frac{T'_0}{2}, n \frac{T'_0}{2} + \frac{\phi_0}{\pi} T'_0 \right)$, $n \in N$ ισχύει $|x| > A_0 e^{-\Lambda t}$ και έξω από αυτά $|x| < A_0 e^{-\Lambda t}$. Μετά τα προηγούμενα ισχυριζόμαστε ότι **οι $(\pm) A_0 e^{-\Lambda t}$ δεν αποτελούν περιβάλλουσες της $x(t)$** .

Άρα η σχέση $x(t) = (\pm) A_0 e^{-\Lambda t}$ ισχύει στις περιπτώσεις των ακραίων θέσεων αλλά (και για τις $t = n \frac{T'_0}{2} + \frac{\phi_0}{\pi} T'_0$, $n \in N$) ενώ

$$\text{για } t \in \left(n \frac{T'_0}{2}, n \frac{T'_0}{2} + \frac{\phi_0}{\pi} T'_0 \right) \rightarrow |x| > A_0 e^{-\Lambda t} \text{ και για } t \notin \left(n \frac{T'_0}{2}, n \frac{T'_0}{2} + \frac{\phi_0}{\pi} T'_0 \right) \rightarrow |x| < A_0 e^{-\Lambda t}$$

5. Ισχύει η $|x(t)| = \left| A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} \cdot e^{-\Lambda t} \cdot \cos(\omega'_0 t - \phi_0) \right| \leq A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \forall t \geq 0$. Οι εκθετικές συναρτήσεις $\pm A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda t}$ εφάπτονται με την $x = A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \cos(\omega'_0 t - \phi_0)$ στα σημεία όπου

$$A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} \cdot e^{-\Lambda t} \cos(\omega'_0 t - \phi_0) = \pm A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \rightarrow \cos(\omega'_0 t - \phi_0) = \pm 1 \rightarrow \omega'_0 t - \phi_0 = n\pi, n \in N$$

$$t = n \frac{T'_0}{2} + \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0, n \in N$$

Δηλ. οι εκθετικές συναρτήσεις $\pm A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda t}$ εφάπτονται της γραφικής παράστασης της απομάκρυνσης όχι τις χρονικές στιγμές που αυτή μεγιστοποιείται απολύτως (το ένα σημείο τομής με τις $\pm A_0 e^{-\Lambda t}$), αλλά λίγο

μετά, κατά $\frac{\phi_0}{2\pi}T'_0$ (συν άλλο τόσο είναι το δεύτερο σημείο τομής των $(\pm)A_0e^{-\Lambda t}$ με την $x(t)$).

21/73

Άρα, περιβάλλουσες της $x(t)$ είναι οι καμπύλες $\pm A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda t}$ που εφάπτονται της $x(t)$ όχι τις στιγμές που αυτή μεγιστοποιείται απολύτως, αλλά λίγο μετά τις στιγμές $t = n \frac{T'_0}{2} + \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$, δηλ ακριβώς στα κέντρα των διαστημάτων $\left(n \frac{T'_0}{2}, n \frac{T'_0}{2} + \frac{\phi_0}{\pi} T'_0 \right)$.

6. Βρίσκουμε ποιες χρονικές στιγμές το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας, δηλ. $x=0$. Πρέπει:

$$\cos(\omega'_0 t - \phi_0) = 0 \rightarrow \omega'_0 t - \phi_0 = (2n+1) \frac{\pi}{2} \rightarrow t = (2n+1) \frac{T'_0}{4} + \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0, n \in N$$

σχέση που δείχνει ότι από τη θέση ισορροπίας $x=0$ δεν περνά χρονικές στιγμές που είναι περιττά πολλαπλάσια του $\frac{T'_0}{4}$, αλλά λίγο μετά (κατά $\frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$) από αυτές. Το φαινόμενο εντονότερο αν $b \uparrow \rightarrow A \uparrow, \omega'_0 \downarrow, T'_0 \uparrow, \phi_0 \uparrow, \phi_0 \cdot T'_0 \uparrow$ και δεν θα υπήρχε αν $b \rightarrow 0$.

Το φαινόμενο δεν είναι κάτι καινούργιο. Η τριγωνομετρική συνάρτηση είναι μετατοπισμένη κατά $\frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$ προς τα δεξιά ή κατά $\frac{\theta_0}{2\pi} T'_0$ προς τα αριστερά, εφόσον υπάρχει η «αρχική φάση, θ_0 ή ϕ_0 », όπως και στην απλή αρμονική ταλάντωση με αρχική φάση.

7. Βρίσκουμε ποιες χρονικές στιγμές μεγιστοποιείται η ταχύτητα. Προς τούτο βρίσκουμε που μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος της ταχύτητας, δηλ. η επιτάχυνση. Έτσι:

$$\cos(\omega'_0 t + \phi_0) = 0 \rightarrow \omega'_0 t + \phi_0 = (2n+1) \frac{\pi}{2} \rightarrow t = (2n+1) \frac{T'_0}{4} - \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0, n \in N$$

με αντίστοιχες μέγιστες (απολύτως) τιμές της ταχύτητας

$$\begin{aligned} v_{\max} &= -A_0 \frac{\omega_0^2}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \sin(\omega'_0 t) = -A_0 \frac{\omega_0^2}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \sin \left[\omega'_0 (2n+1) \frac{T'_0}{4} - \omega'_0 \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0 \right] = \\ &= -A_0 \frac{\omega_0^2}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \sin \left[(2n+1) \frac{\pi}{2} - \phi_0 \right] = -A_0 \frac{\omega_0^2}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} (\pm \cos \phi_0) = \mp A_0 \omega_0 e^{-\Lambda t} \end{aligned}$$

$$v_{\max} = \mp A_0 \omega_0 e^{-\Lambda t}, t = (2n+1) \frac{T'_0}{4} - \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0, n \in N$$

και τιμές για τις θέσεις x που επιτυγχάνονται τα προηγούμενα

$$\begin{aligned}
 x &= A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \cos \left[\omega'_0 (2n+1) \frac{T'_0}{4} - \omega'_0 \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0 - \phi_0 \right] = A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \cos \left[(2n+1) \frac{\pi}{2} - \phi_0 - \phi_0 \right] = \\
 &= A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \cos \left[(2n+1) \frac{\pi}{2} - 2\phi_0 \right] = \pm A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \sin(2\phi_0) = \\
 &= \pm A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} 2 \sin \phi_0 \cos \phi_0 = \pm 2A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} \cdot e^{-\Lambda t} \frac{\Lambda}{\omega_0} \frac{\omega'_0}{\omega_0} = \pm 2A_0 \frac{\Lambda}{\omega_0} e^{-\Lambda t}
 \end{aligned}$$

22/73

$$x(v_{\max}) = \pm 2A_0 \frac{\Lambda}{\omega_0} e^{-\Lambda t}, \quad t = (2n+1) \frac{T'_0}{4} - \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0, \quad n \in N, \quad \cot \phi_0 = \frac{\omega'_0}{\Lambda}$$

σχέσεις που υποδεικνύουν ότι ο μηδενισμός της επιτάχυνσης (και της συνολικά ασκούμενης δύναμης) και η μεγιστοποίηση της ταχύτητας δε συμβαίνει τις στιγμές $t = (2n+1) \frac{T'_0}{4} + \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$, $n \in N$ που περνά από τη θέση ισορροπίας $x=0$, αλλά τις $t = (2n+1) \frac{T'_0}{4} - \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$, δηλ. λίγο πιο πριν και καθώς η ταλάντωση συνεχίζεται όλο και πιο κοντά στη θέση $x=0$ (1^η σχέση).

Δηλ. η ταχύτητα μεγιστοποιείται κατά $\frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$ πριν τις χρονικές στιγμές που είναι περιττά πολλαπλάσια

του τετάρτου της περιόδου, ενώ από την $x=0$ περνά κατά $\frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$ μετά τις ίδιες χρονικές στιγμές.

Αλλιώς. Καθώς το σώμα ξεκινά από ακραία θέση και οδεύει προς τη θέση ισορροπίας $x=0$ η συνολικά ασκούμενη δύναμη (και η επιτάχυνση) μηδενίζεται με ταυτόχρονη μεγιστοποίηση της ταχύτητας πριν την $x=0$ (νέες θέσεις ισορροπίας!!!, ενώ η κίνηση συνεχίζεται) και όλο και πιο κοντά στη θέση ισορροπίας $x=0$ καθώς ο χρόνος περνά. Στη θέση ισορροπίας ($x=0$) φθάνει ήδη επιβραδυνόμενο μετά από χρό-

νο $2 \left(\frac{\phi_0}{2\pi} T'_0 \right)$ από τη στιγμή της μεγιστοποίησης της ταχύτητας. Κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης (ξεκινώντας από ακραία θέση) στο επόμενο τέταρτο της «περιόδου» θα βρισκείται ανάμεσα στη θέση μεγιστοποίησης της ταχύτητας και της θέσης ισορροπίας⁵ ($x=0$) και το επόμενο τέταρτο θα βρεθεί στην απέναντι ακραία θέση. Δηλ. παρόλο που από μέγιστο απομάκρυνσης στο επόμενο της στην άλλη πλευρά ο χρόνος είναι $\frac{1}{2} T'_0$, ο χρόνος από μέγιστο σε μηδενισμό (ακραία θέση προς θέση ισορροπίας $x=0$) κρατά πάνω από $\frac{1}{4} T'_0$ κατά $\frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$, ενώ από μηδενισμό σε μέγιστο λιγότερο από $\frac{1}{4} T'_0$ κατά $\frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$ (από τη θέση ισορροπίας $x=0$ προς ακραία θέση). Δηλ. η κίνηση από ακραία θέση προς το κέντρο ισορροπίας ($x=0$) κρατά περισσότερο χρόνο από την κίνηση από το κέντρο ισορροπίας προς την απέναντι

⁵ Η θέση όπου $\sum \vec{F} = 0$, κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης, δεν είναι η $x=0$. Η προηγούμενη συνθήκη ικανοποιείται όλο και πιο κοντά στη θέση $x=0$, όπου και τελικά σταματά.

ακραία θέση ή αλλιώς ο χρόνος της επιτάχυνσης μικρότερος του $\frac{1}{4}$ της περιόδου και του χρόνου της επιβράδυνσης που είναι μεγαλύτερος του $\frac{1}{4}$ της περιόδου.

Το ότι η ταχύτητα δε μεγιστοποιείται στη θέση ισορροπίας ($x = 0$) μπορούμε να το δείξουμε και με άλλο τρόπο. Ως γνωστόν ισχύει $F_D + F_b = ma$ ή $-kx - bv = ma$. Το ταλαντούμενο σώμα από τη θέση της μέγιστης απομάκρυνσης στην οποία έχει μεγιστοποιηθεί η δύναμη επαναφοράς και μηδενικής ταχύτητας, άρα και μηδενικής δύναμης απόσβεσης, κινείται επιταχυνόμενο προς τη θέση ισορροπίας. Στην πορεία προς το κέντρο ισορροπίας ($x = 0$) αυξάνεται η ταχύτητα, άρα και η δύναμη απόσβεσης, ενώ μικραίνει η απομάκρυνση, άρα και η δύναμη επαναφοράς. Η μέγιστη ταχύτητα επιτυγχάνεται εκεί που οι δύο δυνάμεις εξισώνονται κατά μέτρο και προφανώς δεν μπορεί να είναι η $x = 0$, αφού εκεί μηδενίζεται η δύναμη επαναφοράς, ενώ η δύναμη απόσβεσης δεν είναι μηδέν, αφού το σώμα κινείται. Άρα: για $a = 0$ ή $v = v_{max} \rightarrow x \neq 0$. Έτσι στις θέσεις μεγιστοποίησης της ταχύτητας πρέπει να ισχύει η

$$x = -\frac{b}{k}v_{max} \rightarrow |x| = \frac{b}{k}|v_{max}|, \text{ δηλ. η ταχύτητα μεγιστοποιείται πριν το σώμα περάσει από τη θέση ισορροπίας.}$$

Αμέσως μετά το σώμα αρχίζει να επιβραδύνεται (παρόλο ότι μικραίνουν και οι δύο δυνάμεις που ρυθμίζουν την επιτάχυνση του σώματος). Περνώντας από τη θέση ισορροπίας στην οποία επιβραδύνεται, λόγω της απόσβεσης, και συνεχίζοντας στην άλλη πλευρά η δύναμη επαναφοράς (αλλάζει κατεύθυνση και) ενισχύεται και μαζί με τη δύναμη απόσβεσης που μειώνεται (αφού η ταχύτητα μικραίνει) συμβάλλουν ενισχυτικά στην επιβράδυνση του σώματος. Επίσης, η απόσταση των θέσεων μεγιστοποίησης της ταχύτητας από τη θέση « $x = 0$ » μικραίνει καθώς η ταλάντωση «εμφυλίζεται» και τα μέγιστα της ταχύτητας γίνονται όλο και μικρότερα. Από τη σχέση προκύπτει ότι τα δύο μεγέθη έχουν αντίθετα πρόσημα, που συμβαίνει όταν το σώμα κινείται προς τη θέση ισορροπίας $x = 0$ και πριν απ' αυτή.

Την ισχύ της $x = -(b/k)v_{max}$ μπορούμε να την επιβεβαιώσουμε και με τις προηγούμενες συναρτήσεις.

Λίγο πιο πάνω βρήκαμε τις μέγιστες ταχύτητες (t_{max} οι χρονικές στιγμές μεγιστοποίησης της ταχύτητας)

$$v_{max} = \mp A_0 \omega_0 e^{-\Lambda t_{max}}, t_{max} = (2n+1) \frac{T'_0}{4} - \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0, n \in N, \cot \phi_0 = \frac{\omega'_0}{\Lambda}$$

Πολλαπλασιάζουμε με b : $bv_{max} = \mp A_0 b \omega_0 e^{-\Lambda t_{max}}$

Επίσης βρήκαμε την απομάκρυνση τις στιγμές μεγιστοποίησης της ταχύτητας.

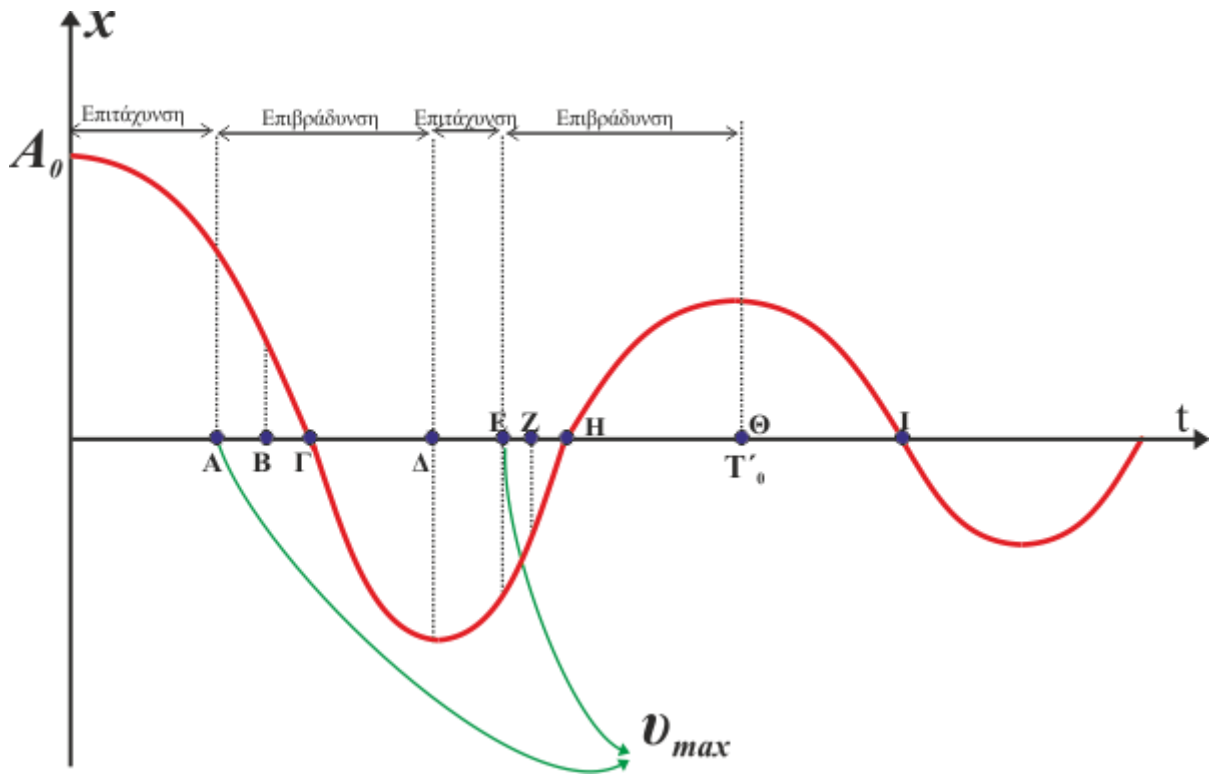
$$x(v_{max}) = \pm 2A_0 \frac{\Lambda}{\omega_0} e^{-\Lambda t_{max}}, t_{max} = (2n+1) \frac{T'_0}{4} - \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0, n \in N$$

Πολλαπλασιάζουμε με k

$$kx = \pm 2kA_0 \frac{\Lambda}{\omega_0} e^{-\Lambda t_{max}} = \pm 2m\omega_0^2 A_0 \frac{b}{\omega_0} e^{-\Lambda t_{max}} = \pm A_0 b \omega_0 e^{-\Lambda t_{max}}$$

Παρατηρούμε ότι όντως τις στιγμές της μεγιστοποίησης της ταχύτητας ισχύει η $b|v_{max}| = k|x|$ (απο-

λύτως).



Σχήμα 4: Η επιτάχυνση «κρατά» λιγότερο χρόνο από ότι η επιβράδυνση κατά $2 \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$.

$$t_A (|v| = \max) = \frac{T'_0}{4} - \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0, \quad t_B = \frac{T'_0}{4}, \quad t_\Gamma (|x| = 0) = \frac{T'_0}{4} + \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$$

$$t_\Delta (|x| = \max) = 2 \frac{T'_0}{4}$$

$$t_E (|v| = \max) = 3 \frac{T'_0}{4} - \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0, \quad t_Z = 3 \frac{T'_0}{4}, \quad t_H (|x| = 0) = 3 \frac{T'_0}{4} + \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$$

$$t_\Theta (|x| = \max) = 4 \frac{T'_0}{4}, \quad t_I (|x| = 0) = 5 \frac{T'_0}{4} + \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0, \quad \cot \phi_0 = \frac{\omega'_0}{\Lambda}$$

- 8.** Η διαφορά φάσης των αρμονικών όρων της ταχύτητας και της απομάκρυνσης δεν είναι $\frac{\pi}{2}$ (όπως θα ήταν στην απλή αρμονική ταλάντωση) αλλά $\frac{\pi}{2} + \phi_0$. Αυτό σημαίνει ότι από μέγιστο της ταχύτητας σε μέγιστο της απομάκρυνσης δεν περνά χρόνος $\frac{1}{4} T'_0$, αλλά $\frac{1}{4} T'_0 + \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$ ή από μέγιστο της απομάκρυνσης σε μέγιστο της ταχύτητας δεν περνά χρόνος $\frac{1}{4} T'_0$, αλλά $\frac{1}{4} T'_0 - \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$ ή από μέγιστο της ταχύτητας σε μηδενισμό της απομάκρυνσης χρόνος $2 \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$. Αυτό διατηρείται καθόλη τη διάρκεια της ταλάντωσης.

σης. Αυτή η διαφοροποίηση, σχετικά με την απλή αρμονική ταλάντωση, οφείλεται στη δράση της δύναμης απόσβεσης.

9. Περί ενεργειών

Στις ακραίες θέσεις της απομάκρυνσης προφανώς παρουσιάζει ακρότατα και η δυναμική ενέργεια. Στις θέσεις αυτές μηδενίζεται η ταχύτητα (άρα και η κινητική ενέργεια). Έτσι η ολική ενέργεια είναι ίση με τη δυναμική ενέργεια, δηλ.

$$E(t) = U_{\max}(t) = U\left(n\frac{T'_0}{2}\right) = \frac{1}{2}kx_{\max}^2 = \frac{1}{2}k\left(A_0e^{-\Lambda n\frac{T'_0}{2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}kA_0^2\right)e^{-2\Lambda n\frac{T'_0}{2}} = E_0e^{-2\Lambda n\frac{T'_0}{2}}, \quad t = n\frac{T'_0}{2}, \quad n \in N$$

οπότε η γραφική παράσταση της $E = E(t)$ και της $U = U(t)$ τις χρονικές στιγμές $t = n\frac{T'_0}{2}$, $n \in N$ έχουν κοινό σημείο (**εφάπτονται** για τις χρονικές στιγμές των ακραίων θέσεων). Επίσης η σχέση $E = E_0e^{-2\Lambda t}$ ισχύει μόνο στις **ακραίες θέσεις** στις οποίες μηδενίζεται η κινητική ενέργεια και **μόνο γι' αυτές τις διακριτές χρονικές στιγμές επιτρέπεται να λέμε ότι «η ενέργεια του συστήματος μειώνεται εκθετικά με το χρόνο».**

Στις θέσεις μεγιστοποίησης της ταχύτητας (λίγο πριν τη $x = 0$ καθώς το σώμα την πλησιάζει) και της κινητικής ενέργειας ($x \neq 0$) οι καμπύλες $E = E(t)$ και $K = K(t)$ δεν έχουν κοινό σημείο (δεν εφάπτονται), αφού υπάρχει και δυναμική ενέργεια στο σύστημα ($E > K$). Οι προηγούμενες καμπύλες $E = E(t)$ και $K = K(t)$ έχουν κοινά σημεία (**εφάπτονται**) στις θέσεις $x = 0$ (διότι εκεί η ολική ενέργεια συμπίπτει με την κινητική ενέργεια) που όμως δεν είναι τα μέγιστα της καμπύλης $K = K(t)$, αλλά λίγο μετά την μεγιστοποίηση (που συμβαίνει πριν $x = 0$), όταν η ταχύτητα και η κινητική ενέργεια θα έχουν αρχίσει να «κάμπτονται».

Μελετούμε τη συνάρτηση $E = E(t) = E_0 \frac{\omega_0^2}{\omega'^2} e^{-2\Lambda t} \left[1 + \frac{\Lambda}{\omega_0} \sin(2\omega'_0 t - \phi_0) \right]$. Προσδιορίζουμε το ρυθμό μεταβολής της (μείωσης) που πρέπει να είναι ίσος με το ρυθμό παραγωγής έργου από την απόσβεση.

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= E_0 \frac{\omega_0^2}{\omega'^2} e^{-2\Lambda t} (-2\Lambda) \left[1 + \frac{\Lambda}{\omega_0} \sin(2\omega'_0 t - \phi_0) \right] + E_0 \frac{\omega_0^2}{\omega'^2} e^{-2\Lambda t} \frac{\Lambda}{\omega_0} \cos(2\omega'_0 t - \phi_0) 2\omega'_0 = \\ &= \dots = -2E_0 \frac{\Lambda \omega_0^2}{\omega'^2} e^{-2\Lambda t} - 2E_0 \frac{\Lambda \omega_0}{\omega'_0} e^{-2\Lambda t} \left[\frac{\Lambda}{\omega'_0} \sin(2\omega'_0 t - \phi_0) - \cos(2\omega'_0 t - \phi_0) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\Lambda}{\omega'_0} \sin(2\omega'_0 t - \phi_0) - \cos(2\omega'_0 t - \phi_0) = \frac{\omega_0}{\omega'_0} \sin(2\omega'_0 t - \phi_0 + \theta) = \frac{\omega_0}{\omega'_0} \sin\left(2\omega'_0 t - \phi_0 + \phi_0 + \frac{3\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{\omega_0}{\omega'_0} \sin\left(2\omega'_0 t + \frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{\omega_0}{\omega'_0} \sin\left(2\omega'_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\omega_0}{\omega'_0} \cos 2\omega'_0 t$$

$$\left(\begin{array}{l} \tan \theta = -\frac{\omega'_0}{\Lambda} = -\cot \phi_0 \\ \sin \theta = -\frac{\omega'_0}{\omega_0} = -\cos \phi_0 \\ \cos \theta = \frac{\Lambda}{\omega_0} = \sin \phi_0 \end{array} \right) \rightarrow \theta = \phi_0 + \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{dE}{dt} = -2E_0 \frac{\Lambda \omega_0^2}{\omega_0'^2} e^{-2\Lambda t} - 2E_0 \frac{\Lambda \omega_0}{\omega'_0} e^{-2\Lambda t} \left(-\frac{\omega_0}{\omega'_0} \cos 2\omega'_0 t \right) = -2E_0 \frac{\Lambda \omega_0^2}{\omega_0'^2} e^{-2\Lambda t} (1 - \cos 2\omega'_0 t)$$

$$\frac{dE}{dt} = -2E_0 \frac{\Lambda \omega_0^2}{\omega_0'^2} e^{-2\Lambda t} (1 - \cos 2\omega'_0 t) \leq 0^6$$

Αφού η 1^η παράγωγος είναι αρνητική συνεπάγεται ότι η ενέργεια είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου. Αναμενόμενο, αφού η απόσβεση είναι παρούσα σε όλη την κίνηση, εκτός των ακραίων σημείων, και καταναλώνει την ενέργεια του συστήματος.

Γίνεται μηδέν για $1 - \cos 2\omega'_0 t = 0 \rightarrow 2\omega'_0 t = 2n\pi \rightarrow t = n \frac{T'_0}{2}$, $n \in N$, δηλ. τις χρονικές στιγμές των ακραίων θέσεων (αναμενόμενο, αφού η ταχύτητα έχει μηδενιστεί). Τα σημεία αυτά μπορεί να είναι **σημεία καμψής**.

Βρίσκουμε τη 2^η παράγωγο.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E}{dt^2} &= -2E_0 \frac{\Lambda \omega_0^2}{\omega_0'^2} e^{-2\Lambda t} (-2\Lambda)(1 - \cos 2\omega'_0 t) - 2E_0 \frac{\Lambda \omega_0^2}{\omega_0'^2} e^{-2\Lambda t} 2\omega'_0 \sin 2\omega'_0 t = \\ &= \dots = 4E_0 \frac{\Lambda^2 \omega_0^2}{\omega_0'^2} e^{-2\Lambda t} - 4E_0 \frac{\Lambda \omega_0^2}{\omega'_0} e^{-2\Lambda t} \left(\frac{\Lambda}{\omega'_0} \cos 2\omega'_0 t + \sin 2\omega'_0 t \right) \end{aligned}$$

⁶ Μπορούσαμε ευκολότερα αν σκεφτούμε ότι ο ρυθμός μείωσης της ενέργειας ρέπει να είναι ίσος με το ρυθμό παραγωγής έργου από την απόσβεση. Έτσι

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{dW_b}{dt} = F_b v = -bv^2 = -b \left[-A_0 \frac{\omega_0^2}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \sin(\omega'_0 t) \right]^2 = \\ &= -2m\Lambda A_0^2 \frac{k}{m} \frac{\omega_0^2}{\omega_0'^2} e^{-2\Lambda t} \sin^2(\omega'_0 t) = -2E_0 \frac{\Lambda \omega_0^2}{\omega_0'^2} e^{-2\Lambda t} (1 - \cos 2\omega'_0 t) \end{aligned}$$

$$\frac{\Lambda}{\omega'_0} \cos 2\omega'_0 t + \sin 2\omega'_0 t = \frac{\omega_0}{\omega'_0} \sin(2\omega'_0 t + \theta) = \frac{\omega_0}{\omega'_0} \sin(2\omega'_0 t + \phi_0)$$

$$\left(\begin{array}{l} \tan \theta = \frac{\Lambda}{\omega'_0} = \tan \phi_0 \\ \sin \theta = \frac{\Lambda}{\omega_0} = \sin \phi_0 \\ \cos \theta = \frac{\omega'_0}{\omega_0} = \cos \phi_0 \end{array} \right) \rightarrow \theta = \phi_0$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E}{dt^2} &= 4E_0 \frac{\Lambda^2 \omega_0^2}{\omega_0'^2} e^{-2\Lambda t} - 4E_0 \frac{\Lambda \omega_0^2}{\omega_0'} e^{-2\Lambda t} \frac{\omega_0}{\omega_0'} \sin(2\omega_0' t + \phi_0) = \\ &= \dots = 4E_0 \frac{\Lambda \omega_0^2}{\omega_0'^2} e^{-2\Lambda t} [\Lambda - \omega_0 \sin(2\omega_0' t + \phi_0)] \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d^2 E}{dt^2} = 4E_0 \frac{\Lambda \omega_0^2}{\omega_0'^2} e^{-2\Lambda t} [\Lambda - \omega_0 \sin(2\omega_0' t + \phi_0)]}$$

$$\frac{d^2 E}{dt^2} = 0 \text{ για}$$

$$\left[\begin{array}{l} \Lambda - \omega_0 \sin(2\omega_0' t + \phi_0) = 0 \rightarrow \sin(2\omega_0' t + \phi_0) = \frac{\Lambda}{\omega_0} = \sin \phi_0 \\ 2\omega_0' t + \phi_0 = \left(\begin{array}{l} 2n\pi + \phi_0 \\ (2n+1)\pi - \phi_0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{l} t = n \frac{T'_0}{2} \rightarrow x = \max \\ t = (2n+1) \frac{T'_0}{4} - \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0 \rightarrow v = \max \end{array} \right), n \in N \end{array} \right]$$

Δηλ. τις χρονικές στιγμές των ακραίων θέσεων και των θέσεων μεγιστοποίησης της ταχύτητας η ενέργεια εμφανίζει σημεία καμπής. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι κατά την κίνηση από ακραίο σημείο (στο οποίο η μηδενική ταχύτητα συνεπάγεται και μηδενική απόσβεση και το ρυθμό παραγωγής έργου της, αλλά και για τη δύναμη επαναφοράς), προς τη θέση μεγιστοποίησης της ταχύτητας ο ρυθμός μεταβολής (μείωσης) της ενέργειας είναι αυξανόμενος (αναμενόμενο αφού η ισχύς της απόσβεσης $P = Fv = -bv^2$ αυξάνεται αυξανόμενης της ταχύτητας και μεγιστοποιείται όταν μεγιστοποιείται η ταχύτητα) και αμέσως μετά βγαίνει μειούμενος μέχρι την επόμενη ακραία θέση που μηδενίζεται (αναμενόμενο αφού από τη στιγμή της μεγιστοποίησης της ταχύτητας αυτή μικραίνει όπως και η ισχύς της απόσβεσης μέχρι την επόμενη ακραία θέση που μηδενίζεται ξανά η ταχύτητα, η απόσβεση και η ισχύς της). Έτσι η καμπύλη $E=E(t)$ από ακραία θέση μέχρι τη θέση μεγιστοποίησης της ταχύτητας είναι κυρτή (όλο και περισσότερο πιο όρθια) και αμέσως μετά κοίλη (όλο και πιο οριζόντια) μέχρι την επόμενη ακραία θέση, κοκ. Στη γραφική παράσταση η καμπύλη κατέρχεται διαρκώς εκτός των χρονικών στιγμών των ακραίων θέσεων που «οριζοντιώνεται».

10. Ιδιότητα εκθετικής μείωσης

Έστω ότι το «πλάτος» της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση $A(t) = A_0 e^{-\Lambda t}$, $t \geq 0$. Αν πάρουμε το ημί-
 κιο δύο τιμών του πλάτους που απέχουν χρονικά κατά Δt έχουμε:

$$\frac{A(t + \Delta t)}{A(t)} = \frac{A_0 e^{-\Lambda(t + \Delta t)}}{A_0 e^{-\Lambda t}} = e^{-\Lambda \Delta t} \rightarrow A(t + \Delta t) = e^{-\Lambda \Delta t} A(t) = \frac{A(t)}{e^{\Lambda \Delta t}} < A(t), e^{-\Lambda \Delta t} < 1 \rightarrow$$

$$\frac{A(t)}{A(t + \Delta t)} = \frac{A(t + \Delta t)}{A(t + 2\Delta t)} = \frac{A(t + 2\Delta t)}{A(t + 3\Delta t)} = \dots = e^{\Lambda \Delta t} \rightarrow$$

$$A(t + n\Delta t) = e^{-\Lambda n \Delta t} A(t) = (e^{-\Lambda \Delta t})^n A(t), n = 0, 1, 2, \dots$$

Δηλ. το ημί-κιο δύο τυχαίων τιμών του πλάτους που απέχουν χρονικά ένα συγκεκριμένο διάστημα **δεν εξαρτάται από την επιλογή της χρονικής στιγμής** που εφαρμόζεται και οι τιμές αυτές σχηματίζουν μια **φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο με λόγο (απόσβεσης) $e^{-\Lambda \Delta t}$** . Μπορούμε να διακρίνουμε δύο σημαντικές περιπτώσεις ως προς την εφαρμοζόμενη χρονική διάρκεια.

A. Αν $\Delta t = T'_0$, δηλ. θεωρήσουμε δύο τιμές του πλάτους (όχι υποχρεωτικά μέγιστες) σε χρονικές στιγμές που απέχουν μεταξύ τους κατά μία περίοδο ο λόγος απόσβεσης της φθίνουσας γεωμετρικής προόδου γίνεται $e^{-\Lambda T'_0}$, όπως φαίνεται και από τα επόμενα (εφαρμογή).

$$A(t + T'_0) = e^{-\Lambda T'_0} A(t) \rightarrow A(t + nT'_0) = e^{-\Lambda n T'_0} A(t) = (e^{-\Lambda T'_0})^n A(t), n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\frac{A(t)}{A(t + T'_0)} = \frac{A(t + T'_0)}{A(t + 2T'_0)} = \frac{A(t + 2T'_0)}{A(t + 3T'_0)} = \dots = e^{\Lambda T'_0} \rightarrow A(t + nT'_0) = e^{-\Lambda n T'_0} A(t) = (e^{\Lambda T'_0})^{-n} A(t), n = 0, 1, 2, \dots$$

Αν περιοριστούμε στο λόγο διαδοχικών μέγιστων απομακρύνσεων προς την ίδια κατεύθυνση (αν η ταλάντωση ξεκίνησε τη χρονική στιγμή μηδέν από μέγιστη απομάκρυνση A_0 οι μέγιστες απομακρύνσεις και προς στην ίδια κατεύθυνση με την αρχική συμβαίνουν μετά από ακέραιο αριθμό περιόδων, δηλ. $A(t) = A(nT'_0) = A_n$) βρισκόμαστε

$$\text{αν } t = 0 \rightarrow A(0) = A_0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \dots = e^{\Lambda T'_0} = e^{\frac{\Lambda T'_0}{2m}} \frac{A_n}{A_{n+1}} \rightarrow A_{n+1} = A_n e^{-\Lambda T'_0} \rightarrow \ln \frac{A_{n+1}}{A_n} = -\Lambda T'_0 \\ A_n = A_0 (e^{\Lambda T'_0})^{-n}, n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right\}$$

B. Αν ως Δt θεωρούμε το χρόνο που περνά έτσι ώστε το πλάτος από μια τιμή του να μειωθεί στο μισό, δηλ $A(t + \Delta t) = \frac{1}{2} A(t)$, ο λόγος απόσβεσης (εξ ορισμού) της φθίνουσας γεωμετρικής προόδου είναι $\frac{1}{2}$ και συμβολίζεται με $\Delta t = T_{1/2}$. Ομοίως, όπως και στα προηγούμενα, έχουμε

$$A(t+T_{1/2}) = e^{-\Lambda T_{1/2}} A(t) \equiv \frac{1}{2} A(t) \rightarrow e^{-\Lambda T_{1/2}} = 2^{-1} \rightarrow \Lambda T_{1/2} = \ln 2 \rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\Lambda}$$

$$A(t+nT_{1/2}) = e^{-\Lambda n T_{1/2}} A(t) = (e^{-\Lambda T_{1/2}})^n A(t) = 2^{-n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\frac{A(t)}{A(t+T_{1/2})} = \frac{A(t+T_{1/2})}{A(t+2T_{1/2})} = \frac{A(t+2T_{1/2})}{A(t+3T_{1/2})} = \dots = 2$$

$$\text{αν } t = 0 \rightarrow A(0) = A_0 \rightarrow \frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \dots = 2 \rightarrow A_n = A_0 2^{-n} = \frac{A_0}{2^n}$$

$$A_{n+1} = \frac{1}{2} A_n \rightarrow A_n = \frac{A_0}{2^n} \rightarrow \ln \frac{A_{n+1}}{A_n} = -\Lambda T'_{1/2} = -\ln 2$$

Δηλ. ο διαρρεύσας χρόνος, όπως ήταν αναμενόμενο (από τη γενική περίπτωση) **δεν εξαρτάται από τη στιγμή εκκίνησης**. Με άλλα λόγια οποτεδήποτε κατά τη διάρκεια της **εκθετικής μείωσης** περάσει χρόνος ίσος με $\ln 2 / \Lambda$, τότε η το πλάτος θα έχει μειωθεί στο μισό (αυτό ισχύει για όλες τις ποσότητες που μειώνονται εκθετικά με το χρόνο, π.χ ραδιενεργός διάσπαση). Ο χρόνος αυτός δικαιολογημένα λέγεται **χρόνος υποδιπλασιασμού** (ή **χρόνος ημίσειας ζωής**) **εξαρτώμενος από τη σταθερά του εκθέτη** και έχει τιμή

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\Lambda}$$

Μετά τον προηγούμενο ορισμό το εκθετικά μειούμενο πλάτος μπορεί να πάρει τη χρήσιμη μορφή:

$$A(t) = \frac{A_0}{2^{\frac{t}{T_{1/2}}}} = \frac{A_0}{2^n}, \quad t = nT_{1/2}, \quad n \in \mathbb{R}^+$$

Αυτά για τα **ακραιφινώς εκθετικώς μειούμενα μεγέθη**.

Ερχόμαστε τώρα στην μελετώμενη **φθίνουσα ταλάντωση που η απομάκρυνση δεν μειώνεται εκθετικά με το χρόνο**. Η σχέση $x(t) = \pm A_0 e^{-\Lambda t}$ δεν ισχύει γενικώς παρά μόνο για τις χρονικές $t = n \frac{T'_0}{2}$, $n \in \mathbb{N}$

στις οποίες μεγιστοποιείται (απολύτως) η απομάκρυνση και η δυναμική ενέργεια (ίση με την ολική), ενώ μηδενίζεται η ταχύτητα και η κινητική ενέργεια, αλλά και τις $t = (2n+1) \frac{T'_0}{4} - \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$ (λίγο πριν περάσει από τη θέση ισορροπίας $x=0$) στις οποίες μεγιστοποιείται η ταχύτητα και η κινητική ενέργεια, αλλά η δυναμική δεν είναι μηδενική.

Αν περιοριστούμε στις χρονικές στιγμές $t = 0, T'_0, 2T'_0, 3T'_0, \dots, nT'_0, \dots, n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να θεωρήσουμε τις αντίστοιχες **μέγιστες θετικές τιμές της απομάκρυνσης** ως «**διαδοχικά πλάτη!!!**» της ταλάντωσης. Αν το πλάτος μειώνεται στο μισό μετά από μια περίοδο τότε $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\Lambda} \equiv T'_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2}}$.

Η σχέση $A(t) = A_0 e^{-\Lambda t}$ από μόνη της δεν εκφράζει τίποτα και το ερώτημα αν ισχύει σε κάθε χρο-

νική στιγμή είναι άνευ νοήματος (αν δεν ξεκαθαριστεί τι είναι το A_0 , προσδιοριζόμενη σταθερά ή η αρχική μετατόπιση που στην περίπτωση αυτή συνοδεύεται και από το πηλίκιο ω_0 / ω'_0).

11. Αν διαιρέσουμε τις απομακρύνσεις του σώματος σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές (όχι υποχρεωτικά όταν βρίσκεται στις ακραίες θέσεις) που απέχουν χρονικά κατά μια «περίοδο, T'_0 » (ή μισή περίοδο) βρίσκουμε ($t_2 = t_1 + T'_0$, A_0 , ϕ_0 προσδιοριζόμενες σταθερές):

$$\frac{x(t_2)}{x(t_1)} = \frac{A_0 e^{-\Lambda t_2} \cos(\omega'_0 t_2 - \phi_0)}{A_0 e^{-\Lambda t_1} \cos(\omega'_0 t_1 - \phi_0)} = e^{-\Lambda(t_2 - t_1)} \frac{\cos(\omega'_0 t_1 + \omega'_0 T'_0 - \phi_0)}{\cos(\omega'_0 t_1 - \phi_0)} = e^{-\Lambda T'_0} \frac{\cos(\omega'_0 t_1 + 2\pi - \phi_0)}{\cos(\omega'_0 t_1 - \phi_0)} = e^{-\Lambda T'_0} = \text{σταθ.}$$

Παρατηρούμε ότι ο λόγος των απομακρύνσεων (όχι υποχρεωτικά των μέγιστων) του σώματος, που απέχουν χρονικά μια περίοδο (εννοείται ότι είναι προς την ίδια κατεύθυνση, εφόσον απέχουν χρονικά μια περίοδο) έχει σταθερή τιμή ίση με $e^{-\Lambda T'_0}$, δηλ. είναι ανεξάρτητο της επιλεγόμενης χρονικής στιγμής t_1 (για μισή περίοδο θα έβγαινε μείον). Αλλιώς, κατά την εξέλιξη της ταλάντωσης η **ποσοστιαία μεταβολή της απομάκρυνσης στη διάρκεια μιας περιόδου είναι σταθερή και ίση με $e^{-\Lambda T'_0} - 1$** . Προφανώς, κάτι ανάλογο θα συμβαίνει και με τη δυναμική ενέργεια ($e^{-2\Lambda T'_0} - 1$).

Απ' αυτή προκύπτει ότι για να συμβεί μείωση στο μισό πρέπει

$$e^{-\Lambda T'_0} = \frac{1}{2} \rightarrow \Lambda T'_0 = \ln 2 \rightarrow \Lambda \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2}} = \ln 2 \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda = \frac{\omega_0 \ln 2}{\sqrt{4\pi^2 + (\ln 2)^2}} \approx 0,11\omega_0$$

$$b = 2m\Lambda = 0,22m\omega_0 = 0,22\sqrt{km}$$

Αυτό σημαίνει ότι για το συγκεκριμένο σύστημα για να συμβαίνει σε μια περίοδο και μείωση στο μισό θα πρέπει το Λ (ή το b) να έχουν μια συγκεκριμένη τιμή.

12. Ρυθμός μείωσης του «πλάτους»

Έστω ότι δεχόμαστε τον ορισμό του πλάτους $A(t) = A_0 e^{-\Lambda t} = x(t)$, $t = nT'_0, n \in \mathbb{N}$. Αν αυξήσουμε το Λ (b), τότε η ω'_0 γίνεται μικρότερη (απομακρύνεται από την ω_0 προς μικρότερες τιμές), η «περίοδος» T'_0 μεγαλύτερη (από μέγιστο σε μέγιστο προς την ίδια κατεύθυνση περνά μεγαλύτερος χρόνος) και το «πλάτος» μειώνεται ταχύτερα (η σταθερά του εκθέτη αυξάνεται απολύτως). Δηλ. αν $b \uparrow$, τότε $\omega'_0 \downarrow$ ή $T'_0 \uparrow$ και «και το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται πιο γρήγορα» (φράση σχολικού βιβλίου). Τι εννοεί όμως με το «πιο γρήγορα»; Ίσως εννοεί το μέσο ρυθμό με τον οποίο μειώνεται το πλάτος στο διάστημα μιας περιόδου, δηλ. το $\left| \frac{dA}{dt} \right|_{T'_0} = f(b) \uparrow$. Ας το δούμε.

Κατά τη διάρκεια μιας «περιόδου» η ποσοστιαία μεταβολή του «πλάτους» (από κορυφή σε κορυφή της απομάκρυνσης) είναι $\frac{|\Delta A|}{A} = \frac{|A_{n+1} - A_n|}{A_n} = 1 - e^{-\Lambda T'_0} = \text{σταθ.} \forall \Lambda < \omega_0$. Η $T'_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2}}$ είναι αύξουσα

συνάρτηση του Λ , τείνοντας στο άπειρο καθώς το Λ τείνει προς την ω_0 . Η ποσότητα

$$\Lambda T'_0 = \Lambda \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2}} = \frac{2\pi}{\frac{1}{\Lambda} \sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\Lambda^2} - 1}}$$

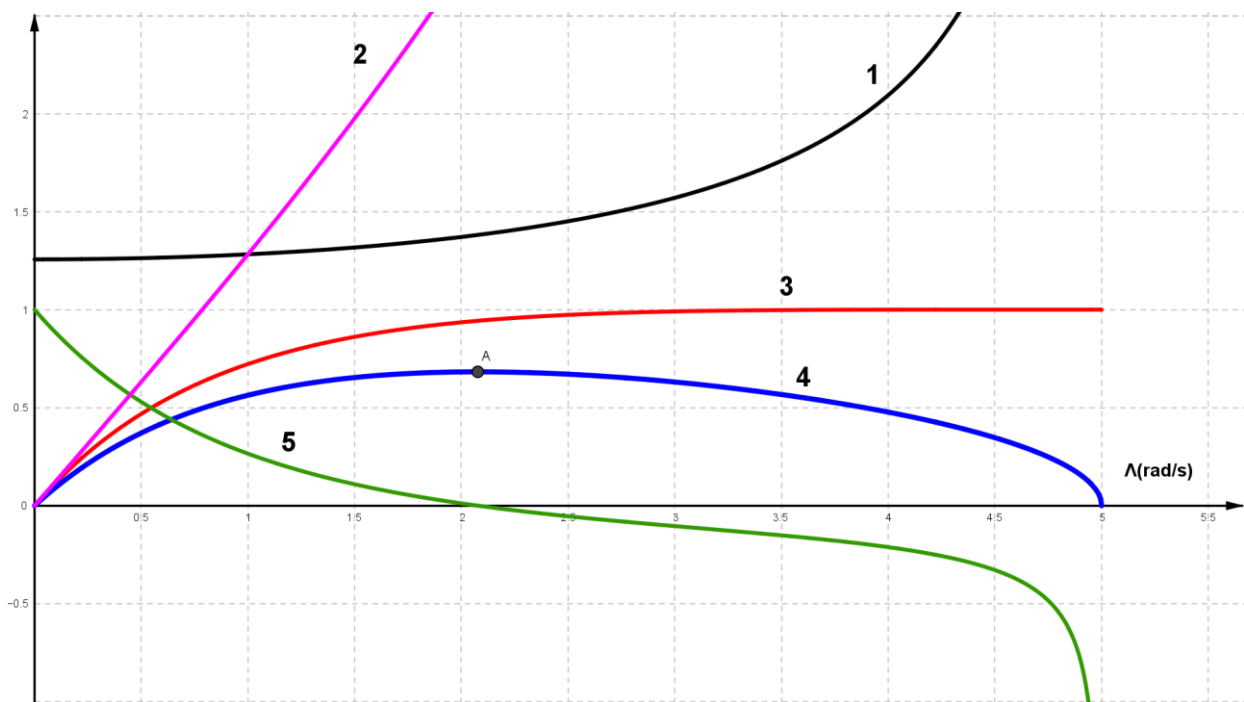
του b) τείνοντας στο άπειρο καθώς το Λ τείνει προς την ω_0 . Η συνάρτηση $e^{-\Lambda T'_0}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του Λ (και του $\Lambda T'_0$) τείνοντας στο μηδέν καθώς το Λ τείνει προς την ω_0 και η $1 - e^{-\Lambda T'_0}$ αύξουσα συνάρτηση του Λ τείνοντας στο 1 καθώς το Λ τείνει προς την ω_0 . Έτσι η **ποσοστιαία μεταβολή (μείωση) του «πλάτους» (κατά τη διάρκεια μιας «περιόδου»)** είναι **αύξουσα συνάρτηση του Λ , τείνοντας στο 1 (100%) καθώς το Λ τείνει προς την ω_0 και αυτό ανεξαρτήτως συστήματος.**

Όμως για μεγαλύτερα Λ η «περίοδος» είναι μεγαλύτερη, οπότε ο μέσος ρυθμός μείωσης του πλάτους που αποδίδεται από το πηλίκο

$$B(\Lambda) = \frac{|A_{n+1} - A_n|}{A_n} = \frac{1 - e^{-\Lambda T'_0}}{T'_0} = \frac{1 - e^{-\Lambda \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2}}}}{\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2}}} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2} \left(1 - e^{-\Lambda \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2}}} \right)}{2\pi}$$

πρέπει να μελετηθεί (το $\sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2}$ φθίνουσα συνάρτηση του Λ τείνοντας στο μηδέν καθώς το Λ τείνει στο ω_0).

Προς αποφυγή βασανιστικών πράξεων αφήνουμε το πρόγραμμα «GeoGebra» να μιλήσει. Από την καμπύλη 4 (και 5), **Σχήμα 5**, φαίνεται ότι ο ρυθμός μείωσης του πλάτους βαίνει αυξανόμενος μέχρι κάποια τιμή του Λ (σημείο A), παρουσιάζει μέγιστο 0,68 για $\Lambda = 2,08 \text{ rad/s}$ και μετά μειούμενος τείνοντας στο μηδέν καθώς Λ τείνει προς την ω_0 . Άρα, ο ισχυρισμός του βιβλίου ότι **«όταν η σταθερά b μεγαλώνει το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται πιο γρήγορα»** δεν είναι απόλυτα σωστός.



Σχήμα 5: Η συνάρτηση 1 (μαύρη) είναι η $T'_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2}}$, η 2 (ροζ) η $\Lambda T'_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\Lambda^2} - 1}}$, η 3 (κόκκινη) η $1 - e^{-\Lambda T'_0}$, η 4 (μπλε) $\frac{1 - e^{-\Lambda T'_0}}{T'_0}$ και η 5 (πράσινη) η παράγωγος της 4. Όλες σε συνάρτηση του Λ με $0 < \Lambda < \omega_0 = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το χρόνο υποδιπλασιασμού για να απαντήσουμε πιο εύκολα στον ισχυρισμό, αρκεί να δεχτούμε ότι η $A(t) = A_0 e^{-\Lambda t}$ ισχύει σε κάθε χρονική στιγμή και όχι σε χρονικές στιγμές που είναι ακέραια πολλαπλάσια της «περιόδου» (που ισχύει ανεξαρτήτως τι συμβολίζει το A_0). Επειδή κατά διάρκεια του χρόνου υποδιπλασιασμού το «πλάτος» μειώνεται κατά 50% έχουμε:

$$\frac{|\Delta A / A|}{T_{1/2}} = \frac{50\%}{T_{1/2}} = \frac{50\%}{\frac{\ln 2}{\Lambda}} = 72,5 \cdot \Lambda, \text{ σχέση που δείχνει ότι ο μέσος ρυθμός μείωσης του πλάτους κατά τη}$$

διάρκεια χρόνου όσος είναι ο χρόνος υποδιπλασιασμού είναι **ανάλογος του Λ** (και του b). Άρα, από αυτή την άποψη είναι σωστός ο ισχυρισμός του βιβλίου.

Αν δεχτούμε ότι η $A(t) = A_0 e^{-\Lambda t}$ ισχύει σε κάθε χρονική στιγμή υπολογίζουμε το **μέσο ρυθμό μείωσης** του «πλάτους» για πέντε σταθερές χρόνου $t = \frac{1}{\Lambda} = \text{σταθερά χρόνου (χρόνος αποκοπής ή ανατροπής)}$.

Το «πλάτος» μετά από μια σταθερά χρόνου Λ^{-1} γίνεται $A = A_0 e^{-1} = 0,367 A_0 = 36,7\% A_0$, ενώ για $t = 5\Lambda^{-1}$ το πλάτος γίνεται $A = A_0 e^{-5} \approx 0,007 A_0 = 0,7\% A_0$. Δηλ. μετά από 5 σταθερές χρόνου ουσια-

στικά δεν υφίσταται ταλάντωση. Άρα: $\left. \frac{dA}{dt} \right|_{sA^{-1}} = \frac{A_0 - 0}{5 \cdot \frac{1}{A}} = \frac{A_0}{5} A = \frac{A_0}{10m} b$, δηλ. **ανάλογος του Λ (και του 33/73)**

b). Άρα, και από αυτή την άποψη είναι σωστός ο ισχυρισμός του βιβλίου.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Οι καμπύλες $A(t) = A_0 e^{-\Lambda t}$ για διαφορετικά Λ (b), ενώ ξεκινούν από το ίδιο σημείο A_0 δεν τέμνονται και αυτή με το μεγαλύτερο Λ βρίσκεται διαρκώς πιο κάτω (δηλ. την ίδια t το A είναι μικρότερο). Αυτό σημαίνει ότι σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα $[0, t]$ ο μέσος ρυθμός μείωσης του πλάτους για αυτό το χρονικό διάστημα είναι μεγαλύτερος για αυτή με το μεγαλύτερο Λ .

Αν παραγωγίσουμε την $A = A_0 e^{-\Lambda t}$ παίρνουμε $\frac{dA}{dt} = -\Lambda A_0 e^{-\Lambda t} < 0 \rightarrow \left| \frac{dA}{dt} \right| = \Lambda A_0 e^{-\Lambda t} = A_0 \frac{\Lambda}{e^{\Lambda t}}$. Από αυτή συνεπάγεται ότι $\forall \Lambda \in (0, \omega_0)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου, δηλ. σε κάθε καμπύλη με συγκεκριμένο Λ η κλίση ή αλλιώς ο ρυθμός μείωσης του πλάτους γίνεται μικρότερος καθώς περνά η ώρα ($\left| \frac{dA}{dt} \right| = f(t) \downarrow$).

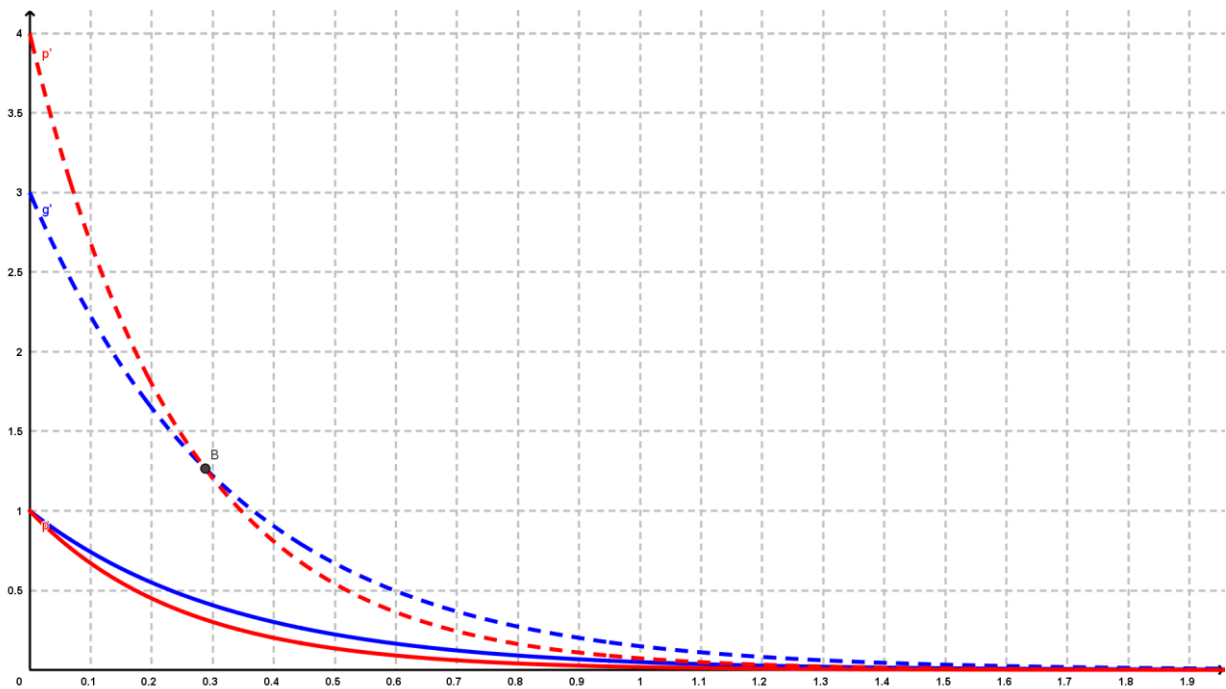
Για $t = 0$ (έναρξη ταλάντωσης) παίρνουμε $\left| \frac{dA}{dt} \right| = \Lambda A_0$, δηλ. αυτή με το μεγαλύτερο Λ (b) έχει μεγαλύτερη κλίση (ρυθμός μείωσης του πλάτους). Αυτό, δηλ. ο ρυθμός μείωσης του πλάτους να είναι μεγαλύτερος για την περίπτωση της μεγαλύτερης απόσβεσης (Λ) δεν συνεχίζεται μέχρι τέλους της ταλάντωσης. Έ-

τσι για $b_1 < b_2 \rightarrow \Lambda_1 < \Lambda_2$, ενώ μέχρι τη στιγμή (μετά από πράξεις⁷) $t = \frac{\ln \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}}{\Lambda_1 - \Lambda_2} = 2m \cdot \frac{\ln b_1 - \ln b_2}{b_1 - b_2}$

ισχύει $\left| \frac{dA}{dt} \right|_{\Lambda_1} < \left| \frac{dA}{dt} \right|_{\Lambda_2}$ τη συγκεκριμένη στιγμή οι δύο κλίσεις γίνονται ίσες ($\left| \frac{dA}{dt} \right|_{\Lambda_1} = \left| \frac{dA}{dt} \right|_{\Lambda_2}$), δηλ. οι εφαιπτόμενες στα αντίστοιχα σημεία των καμπύλων είναι παράλληλες και οι ρυθμοί μείωσης του πλάτους εξισώνονται. Μετά από αυτή τη χρονική στιγμή ο ρυθμός μείωσης του πλάτους γίνεται μικρότερος (!!!)

για την καμπύλη με το μεγαλύτερο Λ ($\left| \frac{dA}{dt} \right|_{\Lambda_1} > \left| \frac{dA}{dt} \right|_{\Lambda_2}$). **Με λίγα λόγια μέχρι αυτή τη χρονική στιγμή η καμπύλη με το μεγαλύτερο Λ είναι πιο απότομη, ενώ μετά αυτή τη χρονική στιγμή γίνεται λιγότερο απότομη από την καμπύλη με το μικρότερο Λ .**

$$^7 \Lambda_1 e^{-\Lambda_1 t} = \Lambda_2 e^{-\Lambda_2 t} \rightarrow \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} = e^{-(\Lambda_2 - \Lambda_1)t} \rightarrow \ln \left(\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} \right) = -(\Lambda_2 - \Lambda_1)t \rightarrow t = \frac{\ln \left(\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} \right)}{\Lambda_1 - \Lambda_2}$$



Σχήμα 6: Οι προηγούμενες διαπιστώσεις για τις συναρτήσεις $y = e^{-3x}$ (κόκκινη) και $y = e^{-4x}$ (μπλε). Οι διακεκομμένες είναι οι πρώτες παράγωγοι. Μετά την $x = \frac{\ln(3/4)}{3-4} = 0,28$ (σημείο τομής) η μπλε έχει μεγαλύτερη κλίση (απολύτως) της κόκκινης (με το μικρότερο εκθέτη).

13. Για αυξανόμενες τιμές της σταθεράς απόσβεσης b (πάντοτε με $b < \sqrt{4mk} = 2m\omega_0$), άρα και του Λ , τα $\omega'_0 \downarrow$, $\phi_0 \uparrow$ και ο εκθετικός όρος μειώνεται πιο «γοργά». Αντίθετα, για πολύ μικρές τιμές!!! της b , $\omega'_0 \approx \omega_0$, $\phi_0 \approx 0$ (αν $b \rightarrow 0$: $\omega'_0 \rightarrow \omega_0$, $\phi_0 \rightarrow 0$) η απομάκρυνση περιγράφεται **προσεγγιστικά** από την

$$x(t) \approx A_0 e^{-\Lambda t} \cos(\omega'_0 t)$$

ΒΑΣΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Μετά την προηγούμενη μελέτη και τις αναγκαίες διευκρινίσεις, απλοποιήσεις (προσεγγίσεις), αλλά και επιφυλάξεις (!!!) ισχυριζόμαστε τα εξής:

- Μπορούμε να ορίσουμε ως «περίοδο, T'_0 » της ταλάντωσης (δεν υπάρχει κάτι στο φαινόμενο που να επαναλαμβάνεται ακριβώς το ίδιο) το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δύο διαδοχικά μέγιστα της απομάκρυνσης $x = x(t)$ και προς την ίδια κατεύθυνση (και τις αντίστοιχες απομακρύνσεις να τις θεωρούμε ως «αρχικά πλάτη» για τις επόμενες περιόδους) ή η χρονική απόσταση ανάμεσα σε διαδοχικά σημεία στα οποία η καμπύλη $x = x(t)$ εφάπτεται με μια από τις οριακές περιβάλλουσες εκθετικές καμπύλες ή τη χρονική απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικές μεγιστοποιήσεις της ταχύτητας της ίδιας κατεύθυνσης, κλπ
- Η γωνιακή ιδιοσυχνότητα με απόσβεση** της ταλάντωσης ω'_0 (καλύτερα των υπεισερχομένων αρμονι-

κών παραγόντων) και η αντίστοιχη περίοδος $T'_0 = \frac{2\pi}{\omega'_0}$, κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης παραμένει στα- 35/73

θερή. Δηλ. καθώς περνά η ώρα και η ταλάντωση φθίνει (μικραίνει το «πλάτος») η «περίοδος» της (π.χ. από μέγιστη απομάκρυνση σε μέγιστη απομάκρυνση και προς την ίδια κατεύθυνση ή το διαδοχικό πέρασμα από τη θέση ισορροπίας προς την ίδια κατεύθυνση) παραμένει σταθερή. Με άλλα λόγια η «περίοδος» της ταλάντωσης δεν επηρεάζεται από το «πλάτος» της (εξωτερικούς παράγοντες -αρχικές συνθήκες) της ταλάντωσης παρά μόνο από τα χαρακτηριστικά του συστήματος. Έτσι λέμε ότι «το σύστημα εκτελεί φθίνουσα αρμονική (καταχρηστικώς) ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα $\omega'_0 < \omega_0$ (ή περίοδο $T'_0 > T_0$) και «πλάτος

$A(t) = A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda t}$ » που μειώνεται εκθετικά με το χρόνο (άρα και η ενέργεια της ταλάντωσης!!! σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο, βλέπε παρακάτω).

3. Η $x = x(t)$ τέμνεται με τις $\pm A_0 e^{-\Lambda t}$ τις χρονικές στιγμές $t = n \frac{T'_0}{2} \wedge n \frac{T'_0}{2} + \frac{\phi_0}{\pi} T'_0$, $n \in N$, $\cot \phi_0 = \frac{\omega'_0}{\Lambda}$, δηλ. τις στιγμές των μέγιστων απομακρύνσεων και λίγο μετά, ενώ με τις $\pm A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda t}$ εφάπτεται τις $t = n \frac{T'_0}{2} + \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$, $n \in N$, δηλ. λίγο μετά τις μεγιστοποιήσεις της x και πριν οι $\pm A_0 \cdot e^{-\Lambda t}$ τμήσουν για 2^n φορές τη $x = x(t)$.

4. Αν $b =$ αρκετά μικρό ($b \ll \sqrt{mk} = m\omega_0$) μπορούμε να θεωρούμε, με μικρό σφάλμα, $\omega'_0 \cong \omega_0$ ($T'_0 \cong T_0$) και $\theta_0 \cong \pi/2$, $\phi_0 \cong 0$, οπότε οι συναρτήσεις $x = x(t)$ και $v = v(t)$ απλοποιούνται και παίρνουν αντιστοίχως τις μορφές

$$x = A_0 e^{-\Lambda t} \cos(\omega'_0 t), \quad v = -A_0 \omega'_0 e^{-\Lambda t} \sin(\omega'_0 t)$$

και αν $b = 0$ οι παραπάνω εξισώσεις δίνουν $\omega'_0 = \omega_0$ και

$$x = A_0 \cos(\omega_0 t), \quad v = -A_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t), \quad (\text{ελεύθερη αμείωτη αρμονική})$$

5. Είδαμε ότι αν διαιρέσουμε δύο διαδοχικές τιμές της απομάκρυνσης που διαφέρουν χρονικά κατά μια «περίοδο» το πηλίκο είναι σταθερό (δηλ. ανεξάρτητο της επιλεγόμενης χρονικής στιγμής) και ίσο με $e^{-\Lambda T'_0}$. Το ίδιο προφανώς ισχύει και για τα διαδοχικά «πλάτη» (μέγιστες απομακρύνσεις και προς την ίδια κατεύθυνση που απέχουν χρονικά μια «περίοδο»). Επίσης, ότι οι $\pm A_0 e^{-\Lambda t}$ δεν δηλώνουν τίποτα άλλο παρά τις τιμές της (μέγιστης) απομάκρυνσης που επιτυγχάνονται για ακέραιο αριθμό περιόδων ή ημιπεριόδων. Έτσι αν θεωρήσουμε δύο τιμές του «πλάτους» A_n και A_{n+1} μετά από n και $n+1$ περιόδους αντιστοίχως από την έναρξη της φθίνουσας ταλάντωσης, το λόγο $\lambda = \frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{A_0 e^{-\Lambda n T'_0}}{A_0 e^{-\Lambda (n+1) T'_0}} = e^{\Lambda T'_0} = \text{σταθ.} > 1$ τον ονομάζουμε **λόγο απόσβεσης**. Δηλ. η σειρά των «πλάτων» σχηματίζει **φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο** με λόγο $e^{-\Lambda T'_0}$

$$A_{n+1} = \frac{A_n}{e^{\Lambda T_0}} = e^{-\Lambda T_0} A_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

6. Η δύναμη απόσβεσης προφανώς δεν είναι διατηρητική, είναι μονίμως σ' αντίθεση φάσης με την ταχύτητα (διαφορά φάσης δύναμης απόσβεσης και ταχύτητας = π) με αποτέλεσμα το έργο της να είναι διαρκώς αρνητικό, «ροκανίζοντας» έτσι την ενέργεια του συστήματος, όχι όμως με ομοιόμορφο τρόπο. Η ισχύς της (ρυθμός παραγωγής έργου ή απόσπασης ενέργειας από το σύστημα) δίνεται από την $P_b = F_b v = -bv^2 < 0$. Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο την $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ βρίσκουμε $\frac{dE}{dt} = v(ma + kx) = -bv^2 < 0$ πάντοτε και η ενέργεια του συστήματος μειώνεται συνεχώς. Έτσι $\frac{dE}{dt} = P_{F_b}$ (αναμενόμενο), δηλ. ο ρυθμός παραγωγής (αρνητικού) έργου ισούται με το ρυθμό μεταβολής της μηχανικής ενέργειας του συστήματος και είναι αυξανόμενος (απολύτως) από ακραία θέση προς τη θέση μεγιστοποίησης της ταχύτητας και στη συνέχεια μειούμενος μέχρι μηδενισμού στην απέναντι ακραία θέση.
7. Η ενέργεια του συστήματος μειώνεται διαρκώς με μεταβαλλόμενο ρυθμό, σε κάποιο χρονικό διάστημα με αυξανόμενο ρυθμό και αμέσως μετά με μειούμενο μέχρι μηδενισμού στις ακραίες θέσεις. Έτσι δεν υπάρχει εκθετική μείωση. Μόνο οι τιμές της στις ακραίες θέσεις ακολουθούν την εκθετική μείωση.

Αν υποθέσουμε (που δεν είναι σωστό) ότι το κάθε στιγμή «πλάτος» εκφράζει την ενέργεια του συστήματος την ίδια χρονική στιγμή (υπάρχει και σε πανεπιστημιακά βιβλία), τότε μπορούμε να γράψουμε

$$E(t) = \frac{1}{2}kx_{\max}^2 = \left(\frac{1}{2}kc^2\right)e^{-2\Lambda t} \text{ που δείχνει όντως εκθετική μείωση.}$$

ΚΡΙΣΙΜΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗ ($\Lambda = \omega_0 \rightarrow b = 2\sqrt{mk}$)

Αν $\Lambda = \omega_0$ ή $b = \sqrt{4km} = 2m\omega_0$, η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής $\ddot{x} + 2\Lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ είναι $\lambda^2 + 2\Lambda\lambda + \omega_0^2 = 0$ και η οποία έχει μια διπλή λύση, τη $\lambda = -\Lambda = -\omega_0$. Έτσι η γενική λύση της διαφορικής είναι η

$$x(t) = c_1 e^{-\Lambda t} + c_2 t e^{-\Lambda t} = (c_1 + c_2 t) e^{-\Lambda t} = (c_1 + c_2 t) e^{-\omega_0 t}$$

Με αρχικές συνθήκες γνωστές τις τιμές της απομάκρυνσης και της ταχύτητας τη χρονική στιγμή μηδέν $x(0)$ και $v(0)$ βρίσκουμε τις σταθερές

$$\begin{pmatrix} x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\omega_0 t} \rightarrow x(0) = c_1 \\ v(t) = c_2 e^{-\omega_0 t} + (c_1 + c_2 t) e^{-\omega_0 t} (-\omega_0) \rightarrow v(0) = c_2 - c_1 \omega_0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c_1 = x(0) \\ c_2 = v(0) + \omega_0 x(0) \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \{x(0) + [v(0) + \omega_0 x(0)]t\} e^{-\omega_0 t}$$

Με εφαρμογή στην προηγούμενη

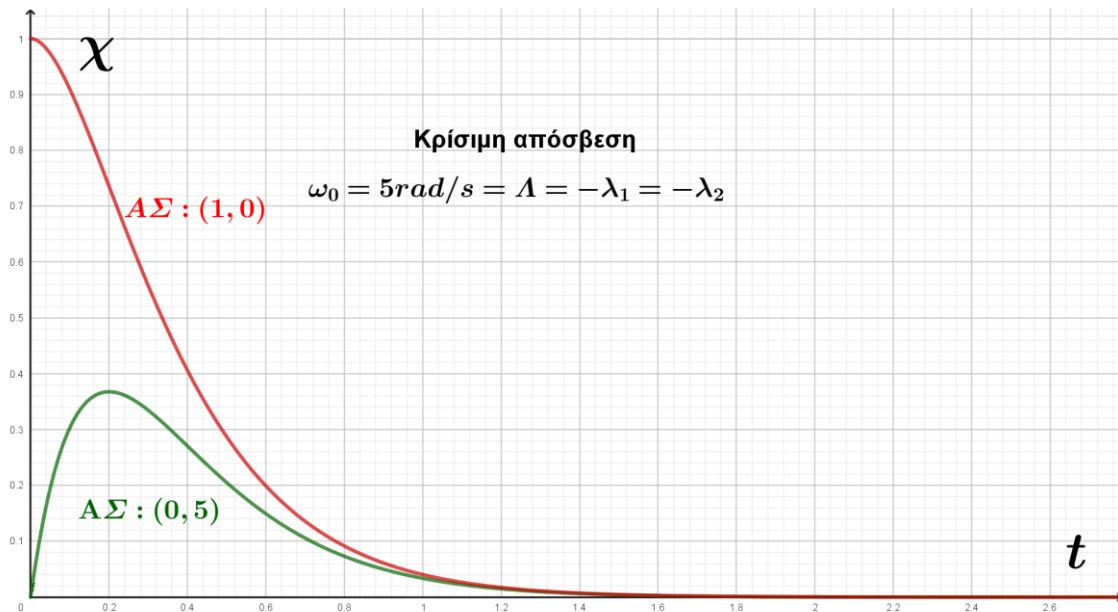
Με αρχικές συνθήκες $x(0)=0$ και $v(0)=\dot{x}(0)=v_0$ παίρνει τη μορφή $x=v_0 t e^{-\omega_0 t} \geq 0$ και με $x(0)=A_0$ και $v(0)=\dot{x}(0)=0$ έχουμε τη μορφή

37/73

$$x(0) = A_0 \text{ και } v(0) = \dot{x}(0) = 0$$

$$x(t) = A_0 (1 + \Lambda t) e^{-\Lambda t} = A_0 (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} > 0, \forall t \geq 0, \omega_0 = \Lambda$$

Από τις προηγούμενες φαίνεται ότι το σύστημα δεν «ταλαντώνεται», αλλά απλά επανέρχεται στη θέση ισορροπίας όπου και σταματά.



Σχήμα 7: Οι δύο εφαρμογές της φθίνουσας με κρίσιμη απόσβεση

ΥΠΕΡΑΠΟΣΒΕΣΗ (ΙΣΧΥΡΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗ, $\Lambda > \omega_0 \rightarrow b > 2\sqrt{mk}$)

Αν $\Lambda > \omega_0$ ή $b > \sqrt{4km} = 2m\omega_0$, η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής $\ddot{x} + 2\Lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ είναι $\lambda^2 + 2\Lambda\lambda + \omega_0^2 = 0$ και η οποία έχει πραγματικές λύσεις, τις $\lambda_{1,2} = -\Lambda \pm \sqrt{\Lambda^2 - \omega_0^2} < 0$. Έτσι η γενική λύση της διαφορικής είναι η

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, (\lambda_1, \lambda_2) < 0$$

Με εφαρμογή στην προηγούμενη αν οι αρχικές συνθήκες είναι οι $x(0)$ και $v(0) = \dot{x}(0)$ βρίσκουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \rightarrow x(0) = c_1 + c_2 \\ v(t) = \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} \rightarrow v(0) = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{\lambda_2 x(0) - v(0)}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ c_2 = \frac{v(0) - \lambda_1 x(0)}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{array} \right.$$

Αν $x(0) = 0$ και $v(0) = \dot{x}(0) = v_0$ έχουμε

$$\begin{pmatrix} c_1 = \frac{-v_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ c_2 = \frac{v_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{pmatrix} \rightarrow x(t) = \frac{-v_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{v_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} \rightarrow \boxed{x(t) = \frac{v_0}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) > 0, \forall t \geq 0}$$

$$\lambda_2 < \lambda_1 < 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 - \lambda_2 > 0 \\ -\lambda_2 > -\lambda_1 > 0 \rightarrow e^{-\lambda_2} > e^{-\lambda_1} \rightarrow e^{-\lambda_2 t} > e^{-\lambda_1 t} \rightarrow \frac{1}{e^{\lambda_2 t}} > \frac{1}{e^{\lambda_1 t}} \rightarrow e^{\lambda_1 t} > e^{\lambda_2 t} \rightarrow e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t} > 0 \end{array} \right\}$$

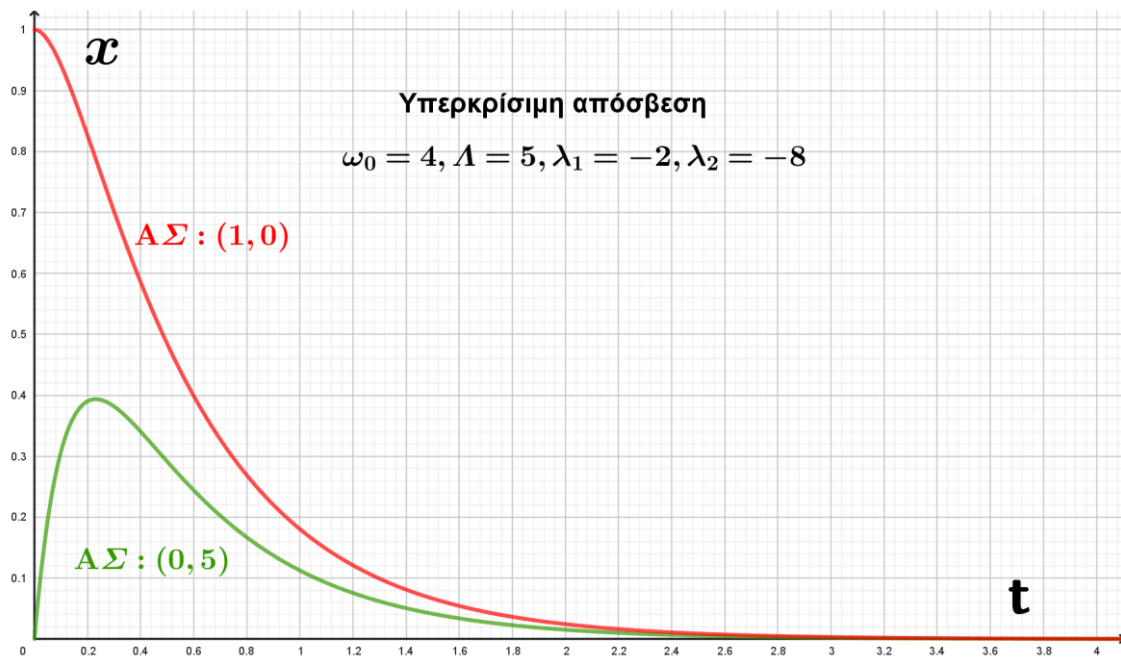
Αν $x(0) = A_0$ και $v(0) = \dot{x}(0) = 0$ έχουμε

$$x(0) = A_0 \text{ και } v(0) = \dot{x}(0) = 0, \Lambda > \omega_0 \rightarrow \begin{pmatrix} c_1 = \frac{\lambda_2 A_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ c_2 = \frac{-\lambda_1 A_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$x(t) = -A_0 \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + A_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} = \frac{A_0}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}) > 0, \forall t \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{\lambda_1 t} > e^{\lambda_2 t} > 0 \\ \lambda_2 < \lambda_1 < 0 \rightarrow |\lambda_2| > |\lambda_1| > 0 \end{array} \right\} \rightarrow |\lambda_2| e^{\lambda_1 t} > |\lambda_1| e^{\lambda_2 t} \rightarrow -\lambda_2 e^{\lambda_1 t} > -\lambda_1 e^{\lambda_2 t} \rightarrow \lambda_2 e^{\lambda_1 t} < \lambda_1 e^{\lambda_2 t}$$

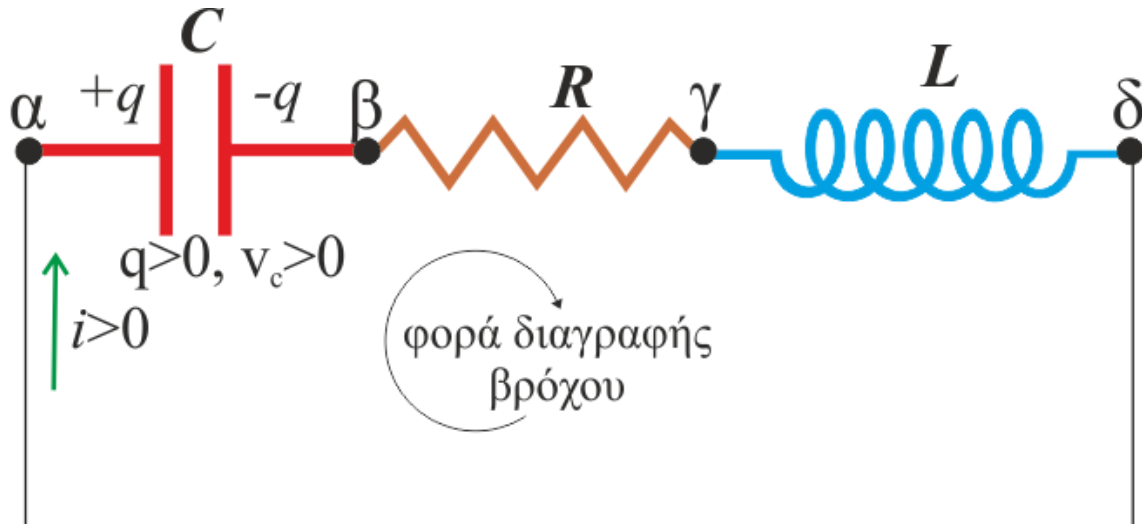
δηλ. για μεγάλες αποσβέσεις η κίνηση είναι «απεριοδική». Το σώμα επιστρέφει στη θέση ισορροπίας, χωρίς ταλάντωση, από την αρχική απομάκρυνση A_0 .



Σχήμα 8: Οι δύο εφαρμογές της φθίνουσας με υπερκρίσιμη απόσβεση

ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ (ΝΟΜΟΣ ΒΡΟΧΩΝ ΚΙΡΧΗΟΦΦ)



Σχήμα 9: Κύκλωμα ταλαντώσεων RLC, όπου αποτυπώνονται οι ορισμοί των θετικού φορτίου και της θετικής έντασης ρεύματος. Ως φορά διαγραφής έχει επιλεγεί η φορά του ρεύματος

Ανάλογα συμπεράσματα προκύπτουν απ' τη μελέτη κυκλώματος «L-C» με απόσβεση R. Αν κάνουμε τις αντιστοιχίσεις

$$k \rightarrow \frac{1}{c}, m \rightarrow L, b \rightarrow R, \Lambda = \frac{b}{2m} \rightarrow \Lambda = \frac{R}{2L}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$x \rightarrow q, \frac{dx}{dt} = v \rightarrow \frac{dq}{dt} = i \rightarrow \frac{dv}{dt} = a = \frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

$$U \rightarrow U_c, K \rightarrow U_B$$

(όπως και στις απλές αρμονικές) προκύπτουν αντίστοιχες εξισώσεις – σχέσεις και ανάλογα συμπεράσματα.

Με εφαρμογή στο κύκλωμα του 2^{ου} κανόνα του Kirchhoff (των βρόχων) (άνοδος ή πτώση δυναμικού κατά τη φορά διαγραφής) παίρνουμε την

$$v_c + v_R + v_L = 0 \rightarrow -\frac{1}{C}q - iR - L \frac{di}{dt} = 0 \rightarrow L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = 0 \rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i + \frac{1}{LC}q = 0$$

ή

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\Lambda \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0, \text{ ή } \ddot{q} + 2\Lambda \dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \Lambda = \frac{R}{2L}, \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Η εξαγωγή της διαφορικής εξίσωσης μπορεί να γίνει και ενεργειακά. Καθώς το φορτίο που περιέχεται στο κύκλωμα ταλαντώνεται διαμέσου της αντίστασης η ηλεκτρομαγνητική ενέργεια χάνεται ως θερμική α-

ποσβένοντας (μειώνοντας το πλάτος) τις ταλαντώσεις. Αν κάποια χρονική στιγμή η ηλεκτρομαγνητική ενέργεια είναι $U = U_B + U_E = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2$ (η αντίσταση δεν αποταμιεύει ενέργεια), τότε ο ρυθμός μεταβολής της θα ισούται απολύτως με το ρυθμό με τον οποίο η ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική στην αντίσταση, δηλ. $\frac{dU}{dt} = -i^2 R$ (το μείον δηλώνει ότι η U μειώνεται). Παραγωγίζοντας τη U παίρνουμε:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU_B}{dt} + \frac{dU_E}{dt} = Li \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} q \frac{dq}{dt} = -i^2 R \rightarrow L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} q + iR = 0 \rightarrow L \frac{dq^2}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0$$

ΥΠΟΚΡΙΣΙΜΗ (ΑΣΘΕΝΗΣ) ΑΠΟΣΒΕΣΗ ($\Lambda < \omega_0 \rightarrow R < 2\sqrt{L/C}$)

Με επίλυση της διαφορικής εξίσωσης για μικρές τιμές της απόσβεσης R ($\Lambda < \omega_0$ ή $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2L\omega_0$) ή με αντικατάσταση στις σχέσεις της προηγούμενης ενότητας των μηχανικών μεγεθών με τα αντίστοιχά τους ηλεκτρικά παίρνουμε

$$q(t) = e^{-\Lambda t} [c_1 \sin(\omega'_0 t) + c_2 \cos(\omega'_0 t)] = \begin{bmatrix} ce^{-\Lambda t} \sin(\omega'_0 t + \theta_0) \\ ce^{-\Lambda t} \cos(\omega'_0 t - \phi_0) \end{bmatrix}, \phi_0 + \theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\Lambda = \frac{R}{2L}, \omega'_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2} < \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Η ταλάντωση σημειώνεται με τον τριγωνομετρικό όρο και το πλάτος της $ce^{-\Lambda t}$ (η σταθερά c έχει διαστάσεις φορτίου) μειώνεται εκθετικά με το χρόνο.

Καθορίζοντας τις αρχικές συνθήκες προσδιορίζουμε τη σταθερά c και τη γωνία θ_0 . Αν γνωρίζουμε τα $q(0)$, $i(0) = \dot{q}(0)$ βρίσκουμε

$$q(t) = ce^{-\Lambda t} \sin(\omega'_0 t + \theta_0) = ce^{-\Lambda t} \cos(\omega'_0 t - \phi_0), \phi_0 + \theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$c = \frac{q(0)}{\sin \theta_0} = \frac{1}{\omega'_0} \sqrt{[\omega'_0 \cdot x(0)]^2 + [\nu(0) + \Lambda \cdot x(0)]^2}$$

$$\tan \theta_0 = \frac{\omega'_0 \cdot q(0)}{i(0) + \Lambda \cdot q(0)} = \cot \phi_0, \sin \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\dot{q}(0) + \Lambda \cdot q(0)}{\omega'_0 \cdot q(0)}\right]^2}} = \cos \phi_0$$

Με αρχικές συνθήκες $t = 0: [q(0) = Q_0 \text{ και } i(0) = \dot{q}(0) = 0]$ καταλήγουμε στα επόμενα.

$$q(0) = Q_0 \text{ και } i(0) = \dot{q}(0) = 0, \quad t \geq 0, \quad \Lambda < \omega_0, \quad \phi_0 + \theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$q(t) = Q_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \sin(\omega'_0 t + \theta_0) = Q_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \cos(\omega'_0 t - \phi_0)$$

$$\text{με } \tan \theta_0 = \frac{\omega'_0}{\Lambda} = \cot \phi_0, \quad \sin \theta_0 = \frac{\omega'_0}{\omega_0} = \cos \phi_0, \quad \cos \theta_0 = \frac{\Lambda}{\omega_0} = \sin \phi_0$$

Το σύστημα (φορτίο πυκνωτή, ρεύμα κυκλώματος, κλπ) εκτελεί φθίνουσα αρμονική (καταχρηστικώς) ταλάντωση με γωνιακή ιδιοσυχνότητα (συχνότητα ημιτόνου) ω'_0 και εκθετικά μειούμενο «πλάτος», όπου

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ η γωνιακή ιδιοσυχνότητα χωρίς απόσβεση
- $\omega'_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2} < \omega_0$ η γωνιακή ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης με απόσβεση του ίδιου συστήματος
- θ_0 (αρχική φάση!!!) εξαρτώμενη (και) από τις αρχικές συνθήκες.

Παραγωγίζοντας την προηγούμενη βρισκουμε για το ρεύμα

$$q(0) = Q_0 \text{ και } i(0) = \dot{q}(0) = 0, \quad \theta_0 + \phi_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$i(t) = -Q_0 \frac{\omega_0^2}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \sin(\omega'_0 t) = Q_0 \frac{\omega_0^2}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \cos\left(\omega'_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{di}{dt} = Q_0 \frac{\omega_0^3}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \sin(\omega'_0 t - \theta_0) = -Q_0 \frac{\omega_0^3}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \cos(\omega'_0 t + \phi_0)$$

$$\tan \theta_0 = \frac{\omega'_0}{\Lambda} = \cot \phi_0, \quad \sin \theta_0 = \frac{\omega'_0}{\omega_0} = \cos \phi_0, \quad \cos \theta_0 = \frac{\Lambda}{\omega_0} = \sin \phi_0$$

Η αύξηση της απόσβεσης R , όπως προκύπτει από τις προηγούμενες σχέσεις, οδηγεί σε μείωση της γωνιακής ιδιοσυχνότητας ω'_0 .

Αν $R \ll \omega_0 L$ αρκετά μικρό μπορούμε να θεωρούμε, με μικρό σφάλμα, $\omega'_0 \cong \omega_0$.

Αν $R \rightarrow 0$: $\omega'_0 \rightarrow \omega_0$ και $q \rightarrow Q_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$ (ελεύθερη αμείωτη αρμονική).

Ο λόγος δύο διαδοχικών τιμών του φορτίου που απέχουν χρονικά κατά μια περίοδο είναι σταθερός δηλ. $\lambda = \frac{Q_t}{Q_{t+T_0}} = e^{\frac{RT_0}{2L}} = e^{-\Lambda T_0} = \text{σταθ.}$

$$\text{Επίσης } T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\Lambda}$$

ΚΡΙΣΙΜΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗ ($\Lambda = \omega_0 \rightarrow R = 2\sqrt{L/C}$)

43/73

Αν $\Lambda = \omega_0$ ή $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2L\omega_0$ τότε

$$q(t) = c_1 e^{-\Lambda t} + c_2 t e^{-\Lambda t} = (c_1 + c_2 t) e^{-\omega_0 t}, \Lambda = \omega_0$$

Με αρχικές συνθήκες $q(0) = Q_0$ και $i(0) = \dot{q}(0) = 0$ η προηγούμενη παίρνει τη μορφή

$$\Lambda = \omega_0, q(0) = Q_0 \text{ και } i(0) = \dot{q}(0) = 0$$

$$q(t) = Q_0 (1 + \Lambda t) e^{-\Lambda t} = Q_0 (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} > 0, \forall t \geq 0$$

δηλ. το φορτίο και η ένταση του ρεύματος δεν ταλαντώνονται (ο πυκνωτής εκφορτίζεται σταδιακά).

ΥΠΕΡΑΠΟΣΒΕΣΗ (ΙΣΧΥΡΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗ, $\Lambda > \omega_0 \rightarrow R > 2\sqrt{L/C}$)

Αν $\Lambda > \omega_0$ ή $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2L\omega_0$, δηλ. για μεγάλες αποσβέσεις προκύπτει η

$$q(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \lambda_{1,2} = -\Lambda \pm \sqrt{\Lambda^2 - \omega_0^2} < 0$$

Με αρχικές συνθήκες $q(0) = Q_0$ και $i(0) = \dot{q}(0) = 0$ η προηγούμενη δίνει την

$$\Lambda > \omega_0, q(0) = Q_0 \text{ και } i(0) = \dot{q}(0) = 0, \forall t \geq 0,$$

$$q(t) = -Q_0 \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + Q_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} = \frac{Q_0}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}) > 0$$

δηλ. η ταλάντωση είναι απεριοδική (ο πυκνωτής εκφορτίζεται σταδιακά).

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

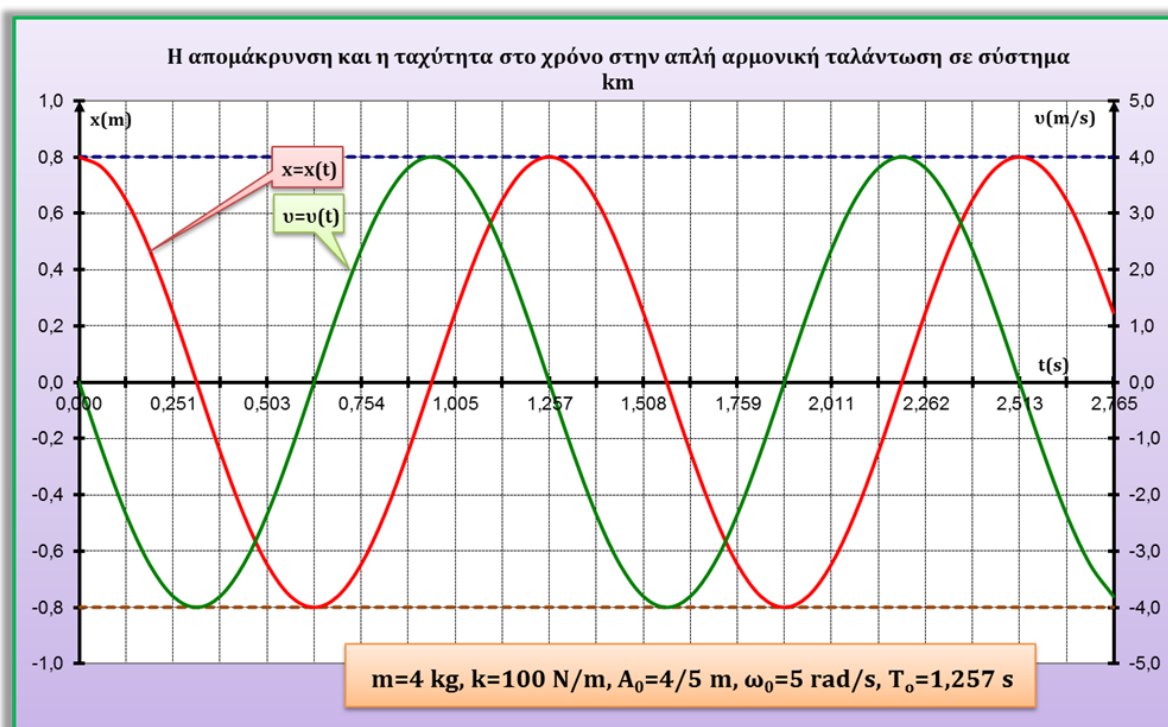
ΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ ΚΑΙ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ

Έστω σύστημα ελατηρίου μάζας, $k = 100 \frac{N}{m}$, $m = 4 \text{ kg}$, χωρίς απόσβεση και χωρίς εξωτερική διέγερση. Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του συστήματος ($2^{\text{ος}}$ νευτωνικός νόμος), $-kx = ma \rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ με $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ διαμορφώνεται ως εξής:

$$\ddot{x} + 25x = 0$$

Η αντίστοιχη χαρακτηριστική της $\lambda^2 + 25 = 0$ έχει μιγαδικές λύσεις, τις $\lambda = \pm 5i$, οπότε η γενική λύση της είναι η $x = c_1 \sin(5t) + c_2 \cos(5t) = c \sin(5t + \theta_0)$. Αν οι αρχικές συνθήκες είναι $x(0) = 0,8 \text{ m}$, $v(0) = \dot{x}(0) = 0$ (απομακρύνουμε τη μάζα κατά $0,8 \text{ m}$ και την αφήνουμε ελεύθερη) η λύση που καλύπτει την τέτοια διέγερση είναι η

$$x(t) = 0,8 \sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right), \text{ SI και } v(t) = 4 \cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) = -4 \sin(5t)$$

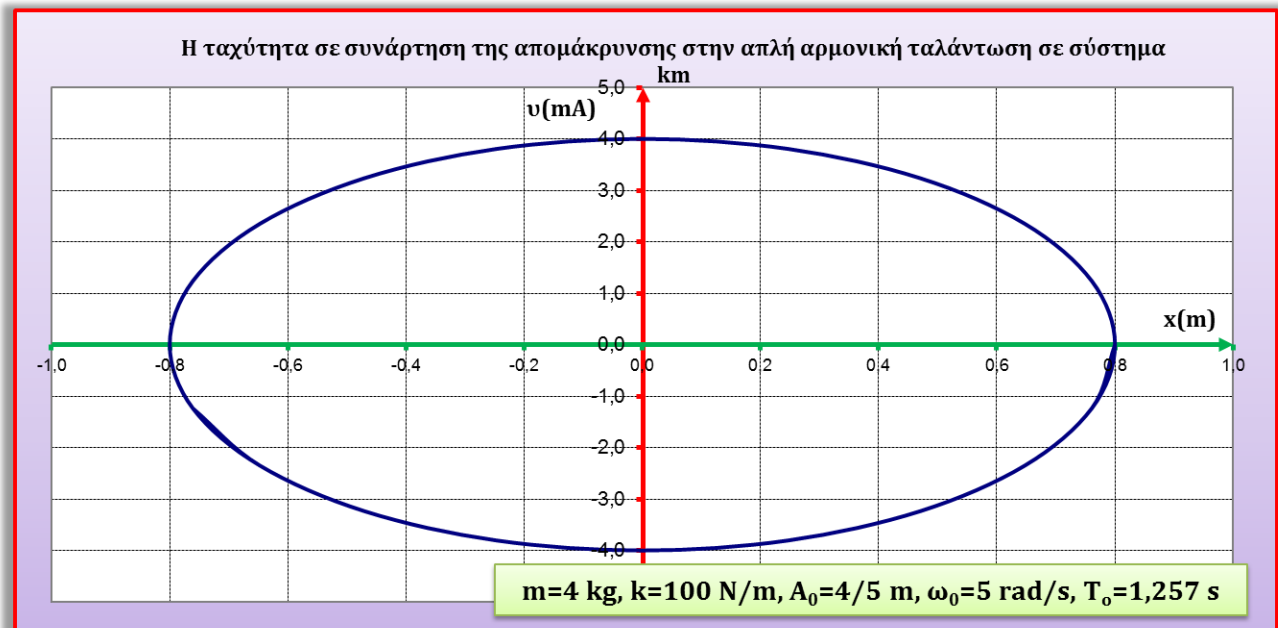


Σχήμα 10: Η απομάκρυνση και η ταχύτητα (v/ω_0) χρονικά της απλής αρμονικής ταλάντωσης του παραδείγματος

Δηλ. σε κάθε περίπτωση το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γωνιακής συχνότητας ίσης με την γωνιακή ιδιοσυχνότητα του συστήματος χωρίς απόσβεση, και με πλάτος και αρχική φάση που εξαρτώ-

νται από τον τρόπο διέγερσης του συστήματος.

45/73



Σχήμα 11: Η ταχύτητα σε συνάρτηση της απομάκρυνσης της απλής αρμονικής ταλάντωσης του παραδείγματος



Σχήμα 12: Οι ενέργειες σε συνάρτηση του χρόνου της απλής αρμονικής ταλάντωσης του παραδείγματος

ΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ ΜΕ (ΑΣΘΕΝΗ, ΚΡΙΣΙΜΗ, ΙΣΧΥΡΗ) ΑΠΟΣΒΕΣΗ, ΧΩΡΙΣ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ

46/73

Αν το ίδιο σύστημα, $k = 100 \frac{N}{m}$, $m = 4 \text{ kg} \rightarrow \omega_0 = 5 \frac{\text{rad}}{s}$ κατά την ταλάντωσή του υφίσταται τη δράση δύναμης απόσβεσης της μορφής $F = -bv$, τότε η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του συστήματος (2ος Νευτωνικός νόμος) είναι η

$$-bv - kx = ma \rightarrow \ddot{x} + 2\frac{b}{2m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \rightarrow \ddot{x} + 2\Lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

ΑΣΘΕΝΗΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

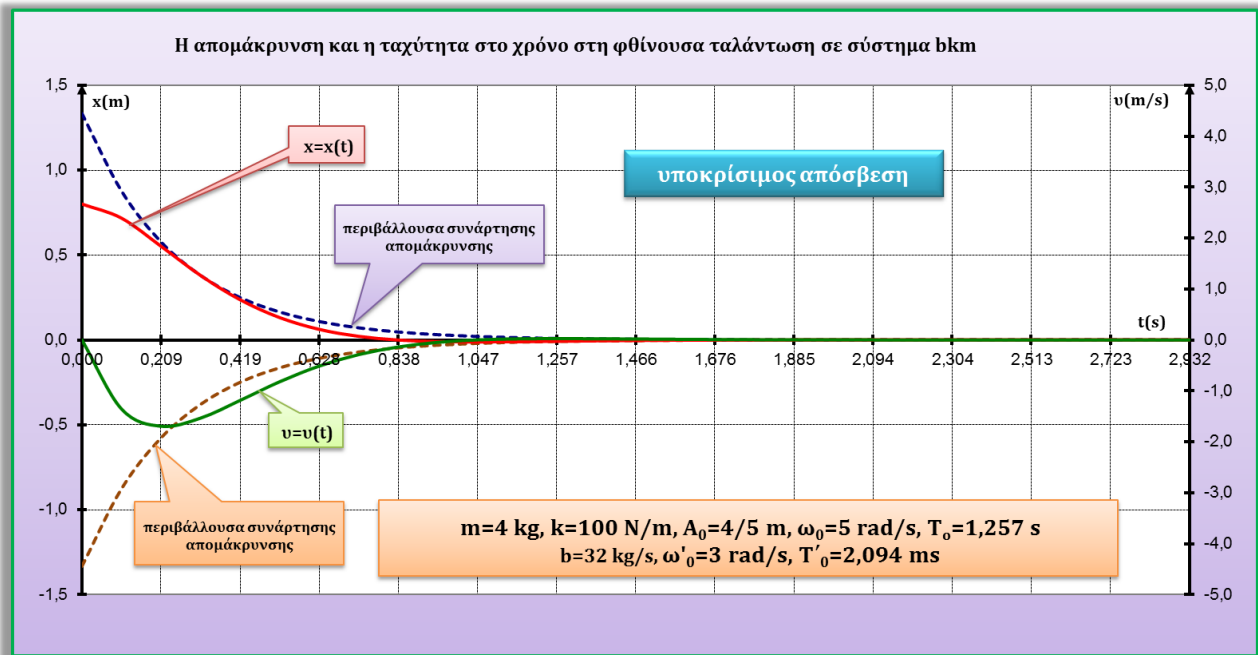
Αν $b = 32 \frac{\text{kg}}{s}$, $b < 2m\omega_0 = 2\sqrt{mk} = 40 \text{ kg/s}$ τότε $\Lambda = \frac{b}{2m} = 4 \text{ s}^{-1} < \omega_0 = 5 \text{ s}^{-1}$ (ασθενής - υποκρισιμη απόσβεση) η διαφορική εξίσωση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\ddot{x} + 8\dot{x} + 25x = 0$$

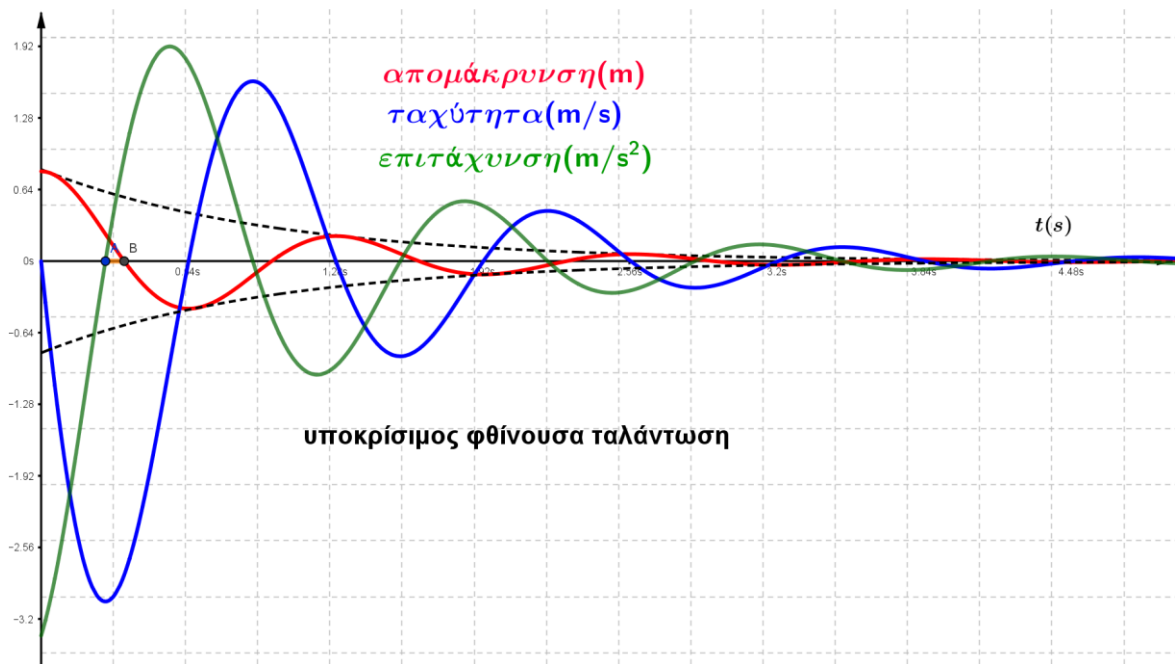
Η αντίστοιχη χαρακτηριστική της $\lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0$ έχει μιγαδικές λύσεις, τις $\lambda = -4 \pm 3i$, οπότε η γενική λύση της είναι η $x = e^{-4t} [c_1 \sin(3t) + c_2 \cos(3t)] = ce^{-4t} \cos(3t - \phi_0)$. Αν οι αρχικές συνθήκες είναι $x(0) = A_0 = 0,8 \text{ m}$, $v(0) = \dot{x}(0) = 0$ (απομακρύνουμε τη μάζα κατά $0,8 \text{ m}$ και την αφήνουμε ελεύθερη) η λύση που προκύπτει είναι η

$$x(t) = A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \cos(\omega'_0 t - \phi_0) = \frac{4}{3} e^{-4t} \cos(3t - 0,93), \quad \sin \phi_0 = \frac{\Lambda}{\omega_0} = \frac{4}{5} \rightarrow \phi_0 \approx 53^\circ \text{ ή } 0,93 \text{ rad}$$

Δηλ. το σύστημα, για μικρές αποσβέσεις ($\Lambda < \omega_0$ ή $b < 2\sqrt{mk}$) εκτελεί ταλάντωση (γύρω από τη θέση ισορροπίας του από την οποία περνά τις στιγμές που μηδενίζεται το συνημίτονο) γωνιακής συχνότητας $\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2} = 3 \frac{\text{rad}}{s} < \omega_0 = 5 \frac{\text{rad}}{s}$ που την ονομάζουμε **γωνιακή ιδιοσυχνότητα με απόσβεση** και περιόδου $T'_0 = \frac{2\pi}{\omega'_0} = \frac{2\pi}{3} \text{ s} = 2,093 \text{ s} > T_0 = 2\pi\sqrt{m/k} = \frac{2\pi}{5} = 1,256 \text{ s}$ εξαρτώμενες από τα φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος.



Σχήμα 13: Η απομάκρυνση και η ταχύτητα χρονικά της υποκρίσιμης φθίνουσας ταλάντωσης του παραδείγματος. Μόνο μια φορά περνά από τη θέση ισορροπίας και επιστρέφει αργά σε αυτή (δε φαίνεται στο σχήμα)



Σχήμα 14: Για το ίδιο σύστημα ($k = 100 \text{ N/m}$, $m = 4 \text{ kg}$) και με ίδιες αρχικές συνθήκες ($x(0) = 0,8 \text{ m}$, $v(0) = 0$), αλλά με $b = 7,92 \text{ kg/s}$, οπότε $\Lambda = 0,99 \text{ s}^{-1}$, $\omega'_0 = 4,99 \text{ rad/s}$, $T'_0 = 1,281 \text{ s}$, $\sin \phi_0 = \Lambda / \omega_0 = 0,198 \rightarrow \phi_0 = 0,2 \text{ rad}$ η απομάκρυνση (κόκκινη) $x(t) = 0,82e^{-0,99t} \cos(4,9t - 0,2)$, οι περιβάλλουσές της $x = \pm 0,82e^{-0,99t}$ (μαύρες) και η ταχύτητα (μπλε). Η πράσινη είναι το 1/6 της επιτάχυνσης που

μηδενίζεται (μέγιστη ταχύτητα) πριν το μηδενισμό της απομάκρυνση ($x=0$) και μάλιστα όλο και πιο κοντά της όσο η ταλάντωση συνεχίζεται (απόσταση τομών καμπύλων κόκκινης και πράσινης με τον άξονα των χρόνων)

48/73



Σχήμα 15: Οι ενέργειες του παραδείγματος (προηγούμενου σχήματος). Η καμπύλη ολικής ενέργειας εμφανίζει ακρότατα τις στιγμές μεγιστοποίησης της δυναμικής ενέργειας που είναι οι ακραίες θέσεις (οι δύο καμπύλες εφάπτονται τις ίδιες χρονικές στιγμές) και σημεία καμπής τις στιγμές μεγιστοποίησης της κινητικής ενέργειας, λίγο πριν μηδενιστεί η απομάκρυνση (οι δύο καμπύλες εφάπτονται τις στιγμές που περνά από τη θέση μηδενισμού της απομάκρυνσης)

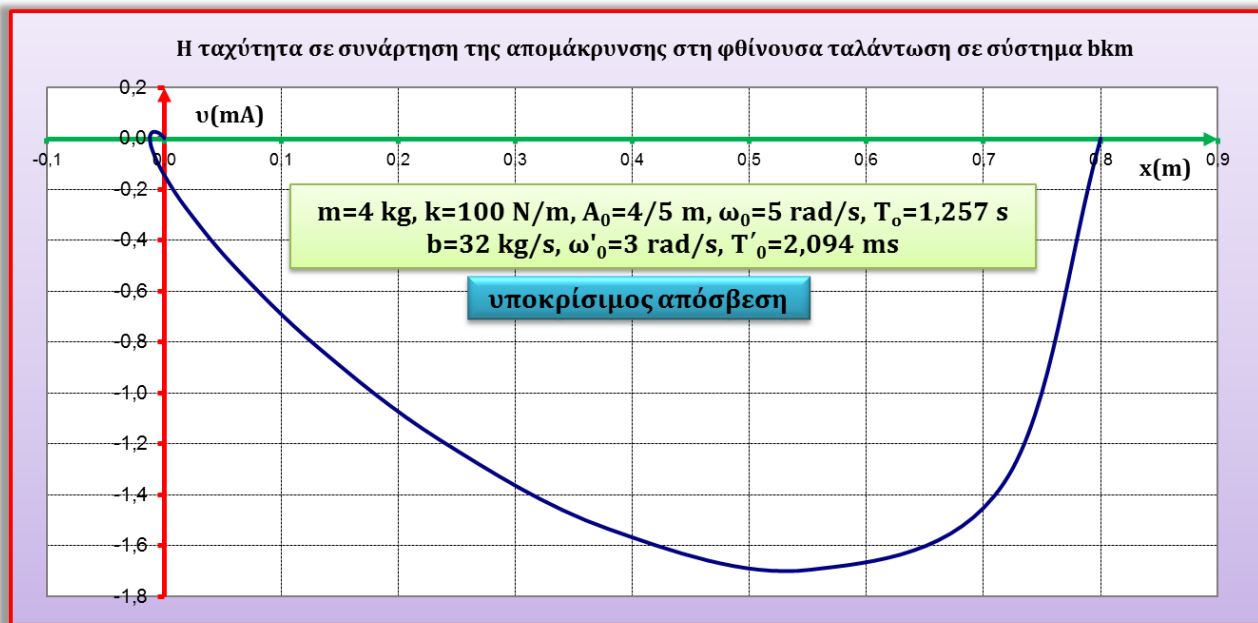
Η γωνία ϕ_0 εξαρτάται τόσο από τη φύση του συστήματος όσο και από τις αρχικές συνθήκες. Η ονομασία «αρχική φάση» μάλλον δεν έχει νόημα. Ο όρος $(4/3)e^{-4t}$ μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο και προφανώς δεν αποτελεί κανένα «πλάτος» της ταλάντωσης, αφού μειώνεται με το χρόνο.

Μετά από πράξεις (παραγωγίσεις κλπ) καταλήγουμε στις επόμενες σχέσεις

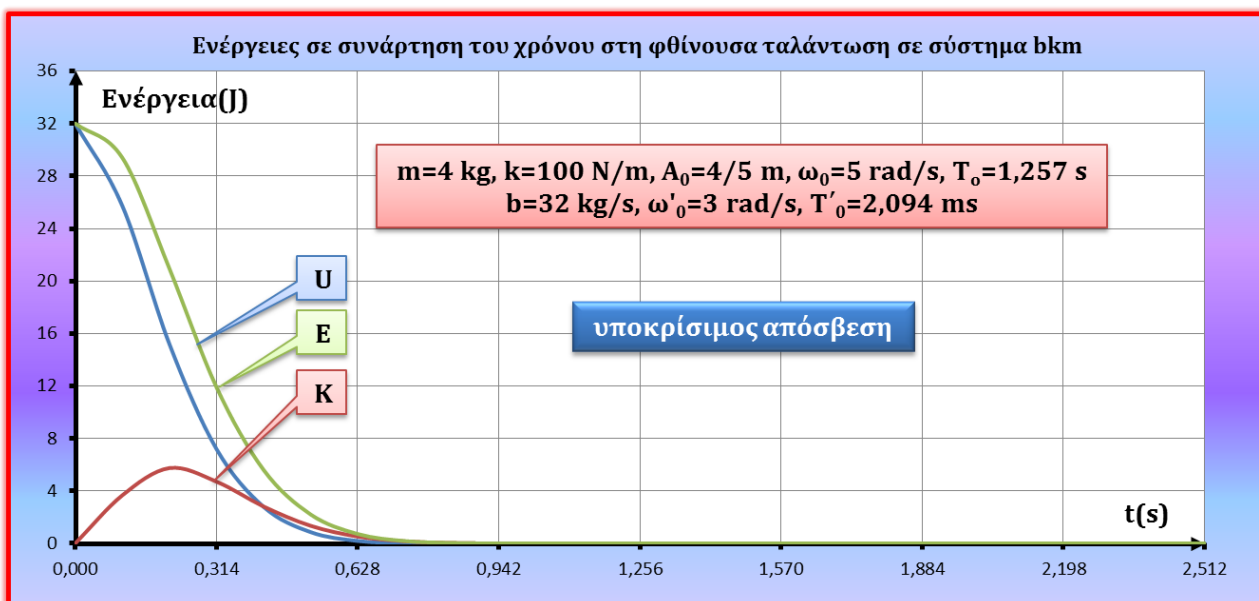
$$v = -\frac{20}{3}e^{-4t} \sin(3t), \quad a = -\frac{100}{3}e^{-4t} \cos(3t + 0,93), \quad E_0 = \frac{1}{2}kA_0^2 = 32 \text{ J},$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{800}{9}e^{-8t} \cos^2(3t - 0,93), \quad K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{800}{9}e^{-8t} \sin^2(3t) \text{ και}$$

$$E = U + K = \frac{800}{9}e^{-8t} \left[1 + \frac{4}{5} \sin(6t - 0,93) \right]$$



Σχήμα 16: Η ταχύτητα σε συνάρτηση της απομάκρυνσης της υποκρίσιμης φθίνουσας ταλάντωσης του παραδείγματος



Σχήμα 17 :Οι ενέργειες χρονικά της υποκρίσιμης φθίνουσας ταλάντωσης του παραδείγματος

Παρατηρήσεις (επιβεβαιώσεις γενικών συμπερασμάτων στο παράδειγμα)

1. Οι μεγιστοποιήσεις της απομάκρυνσης (και της δυναμικής ενέργειας) συμβαίνουν τις στιγμές που η πρώτη της παράγωγος, δηλ. η ταχύτητα, γίνεται μηδέν. Έτσι:

$$v = 0 \rightarrow \sin(3t_1) = 0 \rightarrow 3t_1 = n\pi \rightarrow t_1 = n \frac{\pi}{3} \text{ s} = n \frac{T'_0}{2}, n \in N \quad (\omega'_0 = 3 \text{ rad/s})$$

δηλ. κάθε μισή «περίοδο» το σώμα φτάνει σε ακραία θέση, όπου αντιστρέφεται η κίνηση. Τα μέγιστα της απομάκρυνσης υπολογίζονται ως εξής:

$$x_{\max} = x(3t_1) = \frac{4}{3} e^{-4t_1} \cos(N\pi - \phi_0) = \pm \frac{4}{3} e^{-4t_1} \cos \phi_0 = \pm \frac{4}{5} e^{-4t_1}, \quad \left(\cos \phi_0 = \frac{\omega'_0}{\omega_0} = \frac{3}{5} \right)$$

δηλ. τα μέγιστα της απομάκρυνσης βρίσκονται πάνω στις καμπύλες $\pm \frac{4}{5} e^{-4t} = \pm A_0 e^{-4t}$.

2. Οι μεγιστοποιήσεις της ταχύτητας (και της κινητικής ενέργειας) συμβαίνουν τις στιγμές που η πρώτη της παράγωγος, δηλ. η επιτάχυνση, γίνεται μηδέν. Έτσι:

$$\cos(3t_2 + \phi_0) = 0 \rightarrow 3t_2 + \phi_0 = (2n+1) \frac{\pi}{2} \rightarrow t_2 = (2n+1) \frac{\pi}{6} - \frac{\phi_0}{3} = (2n+1) \frac{T'_0}{4} - \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0, \quad n \in N \quad \left(T'_0 = \frac{2\pi}{3} \right)$$

δηλ. η ταχύτητα μεγιστοποιείται πριν τις χρονικές στιγμές που αντιστοιχούν σε περιττά πολλαπλάσια του τετάρτου της «περιόδου». Οι τιμές της μέγιστης ταχύτητας (κάθε φορά που πλησιάζει τη θέση ισορροπίας) υπολογίζονται από τη σχέση:

$$v_{\max} = v(t_2) = -\frac{20}{3} e^{-4t_2} \sin(3t_2) = -\frac{20}{3} e^{-4t_2} \sin \left[(2N+1) \frac{\pi}{2} - \phi_0 \right] = \mp \frac{20}{3} e^{-4t_2} \cos \phi_0 = \mp 4e^{-4t_2},$$

δηλ. οι κορυφές της $v = v(t)$, βρίσκονται πάνω στις ελθετικές καμπύλες $\mp 4e^{-4t}$.

3. Οι μηδενισμοί της απομάκρυνσης συμβαίνουν όταν

$$\cos(3t_3 - \phi_0) = 0 \rightarrow 3t_3 - \phi_0 = (2n+1) \frac{\pi}{2} \rightarrow t_3 = (2n+1) \frac{\pi}{6} + \frac{\phi_0}{3} = (2n+1) \frac{T'_0}{4} + \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0, \quad n \in N$$

δηλ. η απομάκρυνση μηδενίζεται (περνά από τη θέση ισορροπίας) μετά τις χρονικές στιγμές που αντιστοιχούν σε περιττά πολλαπλάσια του τετάρτου της «περιόδου». Με άλλα λόγια η ταχύτητα μεγιστοποιείται πριν περάσει από τη θέση ισορροπίας (όπου μηδενίζεται η απομάκρυνση), οπότε μέχρι τη θέση ισορροπίας (μετά τη μεγιστοποίηση της ταχύτητας) επιβραδύνεται, όπως και στη συνέχεια αφού περάσει από την άλλη πλευρά. Η ταχύτητα μεγιστοποιείται πριν κατά $\phi_0/3$ από τη χρονική στιγμή που αντιστοιχεί στο επόμενο περιττό τέταρτο της περιόδου και περνά από τη θέση ισορροπίας μετά κατά $\phi_0/3$. Άρα ανάμεσα σε ένα μέγιστο ταχύτητας και στον αμέσως επόμενο μηδενισμό της απομάκρυνσης περνά χρόνος που αντιστοιχεί σε $2\phi_0/3$.

Το προηγούμενο σημαίνει ότι τις στιγμές που μεγιστοποιείται η ταχύτητα (μηδενισμός επιτάχυνσης καθώς πλησιάζει στη θέση ισορροπίας) πρέπει η δύναμη επαναφοράς να ίση κατά μέτρο με τη δύναμη απόσβεσης, δηλ. $kx = bv_{\max}$. Ας το επιβεβαιώσουμε.

$$\begin{aligned}
kx|_{v_{\max}} &= 100 \frac{4}{3} e^{-4t_2} \cdot |\cos(3t_2 - \phi_0)| = \frac{400}{3} e^{-4t_2} \cdot \left| \cos \left[(2n+1) \frac{\pi}{2} - \phi_0 - \phi_0 \right] \right| = \\
&= \frac{400}{3} e^{-4t_2} |\sin(2\phi_0)| = \frac{400}{3} e^{-4t_2} 2 \sin \phi_0 \cos \phi_0 = \frac{400}{3} e^{-4t_2} 2 \frac{4}{5} \frac{3}{5} = \\
&= 128 e^{-4t_2} \\
&\left\{ 3t_2 = (2n+1) \frac{\pi}{2} - \phi_0, \sin \phi_0 = \frac{\Lambda}{\omega_0} = \frac{4}{5}, \cos \phi_0 = \frac{\omega'_0}{\omega_0} = \frac{3}{5} \right\}
\end{aligned}$$

και $bv_{\max} = 32 \cdot (4e^{-4t_2}) = 128e^{-4t_2}$. Άρα ισχύει. Έτσι η συνολική ασκούμενη δύναμη μηδενίζεται πριν περάσει από τη θέση ηρεμίας του (μηδενικής απομάκρυνσης).

4. Τις χρονικές στιγμές που μεγιστοποιείται η απομάκρυνση η ταχύτητα είναι μηδέν, οπότε όλη ενέργεια του συστήματος είναι ίση με την αντίστοιχη μέγιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας (η κινητική ενέργεια είναι μηδέν). Άρα:

$$U_{\max} = \frac{1}{2} kx_{\max}^2 = \frac{1}{2} 100 \left(\frac{4}{5} e^{-4t_1} \right)^2 = 32e^{-8t_1} = E_0 e^{-8t_1}, \quad t_1 = n \frac{\pi}{3} = n \frac{T'_0}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Έτσι τα μέγιστα της δυναμικής ενέργειας, που είναι σημεία καμπής της ολικής ενέργειας ($\frac{dE}{dt} = P_{\text{απόσβ}} = -bv^2 = 0$, αν $v = 0$), καθώς το σώμα κινείται από τη θέση μεγιστοποίησης της ταχύτητας προς την απέναντι ακραία θέση μειώνεται η ταχύτητα, η δύναμη απόσβεσης και ο απόλυτος ρυθμός απώλειας της ενέργειας, μηδενίζονται και τα τρία στην ακραία θέση, και στη συνέχεια κινούμενο προς τη θέση ισορροπίας αυξάνεται η ταχύτητα, η δύναμη απόσβεσης και ο απόλυτος ρυθμός απώλειας της ενέργειας (δηλ. στις ακραίες θέσεις ο απόλυτος ρυθμός απώλειας της ενέργειας από μειούμενος μετατρέπεται σε αυξανόμενο), βρίσκονται πάνω στην καμπύλη $32e^{-8t} = E_0 e^{-8t}$. Οι καμπύλες $U = U(t)$ και $E = E(t)$ εφάπτονται τις χρονικές στιγμές $t_1 = n \frac{\pi}{3} = n \frac{T'_0}{2}$, $n \in \mathbb{N}$ σε σημεία που είναι μέγιστο για την πρώτη και σημείο καμπής για τη δεύτερη.

5. Τα μέγιστα της κινητικής ενέργειας επιτυγχάνονται πριν τον μηδενισμό της απομάκρυνσης, δηλ. έχει ταυτόχρονα και δυναμική ενέργεια, οπότε είναι μικρότερη σε κάθε χρονική στιγμή της ολικής ενέργειας, εκτός από τις χρονικές στιγμές που περνά από τη θέση ισορροπίας, που όμως εκεί δεν είναι τα μέγιστά της.

$$K_{\max} = \frac{1}{2} mv_{\max}^2 = \frac{1}{2} 4(4e^{-4t_2})^2 = 32e^{-8t_2} = E_0 e^{-8t_2}, \quad t_2 = (2n+1) \frac{\pi}{6} - \frac{\phi_0}{3} = (2n+1) \frac{T'_0}{4} - \frac{\phi_0}{3}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Άρα, τα μέγιστα της κινητικής ενέργειας, που είναι μικρότερα των αντίστοιχων τιμών της ολικής ενέργειας που τις ίδιες στιγμές εμφανίζει **σημεία καμπής**, βρίσκονται επίσης πάνω στην καμπύλη $32e^{-8t} = E_0 e^{-8t}$. Οι καμπύλες $K = K(t)$ και $E = E(t)$ εφάπτονται τις χρονικές στιγμές

$$t_3 = (2n+1)\frac{\pi}{6} + \frac{\phi_0}{3} = (2n+1)\frac{T'_0}{4} + \frac{\phi_0}{2\pi}T'_0, n \in N$$

με $x = 0$ (μηδενισμός δυναμικής), σε σημεία που όμως δεν είναι μέγιστα για την κινητική ενέργεια.

ΚΡΙΣΙΜΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Αν το ίδιο σύστημα κατά την ταλάντωσή του υφίσταται τη δράση ισχυρής δύναμης απόσβεσης με $b = 40 \frac{kg}{s}$ (κρίσιμη απόσβεση) οπότε $A = \frac{b}{2m} = 5 s^{-1}$ ($A = \frac{b}{2m} = \omega_0 \rightarrow b = 2m\omega_0 = 2\sqrt{mk}$) τότε η διαφορική εξίσωση $\ddot{x} + 2A\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ με $\omega_0 = 5 rad/s$ διαμορφώνεται ως εξής:

$$\ddot{x} + 10\dot{x} + 25x = 0$$

Η αντίστοιχη χαρακτηριστική της $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$ έχει μια διπλή πραγματική λύση την $\lambda = -5$, οπότε η γενική λύση της είναι η

$$x = c_1 e^{-5t} + c_2 t e^{-5t} = (c_1 + c_2 t) e^{-5t}$$

Αν οι αρχικές συνθήκες είναι $x(0) = A_0 = \frac{4}{5} m$, $v(0) = \dot{x}(0) = 0$ παίρνουμε την

$$x(t) = \left(\frac{4}{5} + 4t \right) e^{-5t} \geq 0$$

συνάρτηση η οποία δεν παίρνει αρνητικές τιμές για καμία χρονική στιγμή (θεωρητικά τείνει στο μηδέν καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο), που σημαίνει ότι το σώμα επιστρέφει στη θέση ισορροπίας του χωρίς ποτέ να την ξεπεράσει.

ΥΠΕΡΚΡΙΣΙΜΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

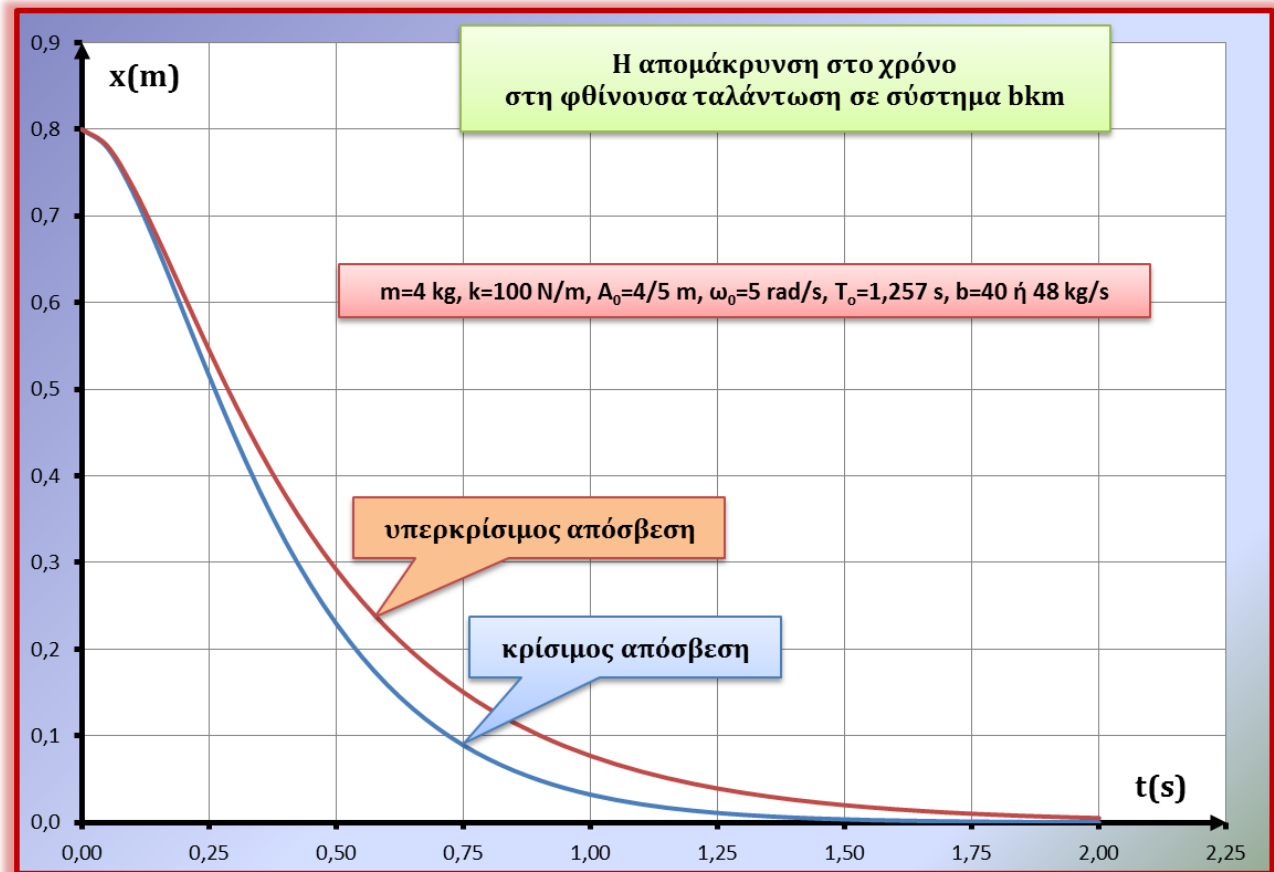
Αν το ίδιο σύστημα κατά την ταλάντωσή του υφίσταται τη δράση ισχυρότατης δύναμης απόσβεσης με $b = 48 \frac{kg}{s}$ (υπεραπόσβεση) οπότε $A = \frac{b}{2m} = 6 s^{-1}$ ($A = \frac{b}{2m} > \omega_0 \rightarrow b > 2m\omega_0 = 2\sqrt{mk}$), τότε η διαφορική εξίσωση $\ddot{x} + 2A\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ με $\omega_0 = 5 \frac{rad}{s}$ διαμορφώνεται ως εξής:

$$\ddot{x} + 12\dot{x} + 25x = 0$$

Η αντίστοιχη χαρακτηριστική της $\lambda^2 + 12\lambda + 25 = 0$ έχει δύο πραγματικές λύσεις τις $\lambda = -9,3, -2,7$, οπότε η γενική λύση της είναι η $x = c_1 e^{-2,7t} + c_2 e^{-9,3t}$. Αν οι αρχικές συνθήκες είναι $x(0) = A_0 = \frac{4}{5} m$, $v(0) = \dot{x}(0) = 0$ παίρνουμε την

$$x = 1,13e^{-2,7t} - 0,33e^{-9,3t} \geq 0 \left(e^{6,6t} \geq \frac{0,33}{1,13} \right)$$

συνάρτηση η οποία δεν παίρνει αρνητικές τιμές για καμία χρονική στιγμή (θεωρητικά τείνει στο μηδέν καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο, πιο αργά από την προηγούμενη κρίσιμο), που σημαίνει ότι το σώμα επιστρέφει στη θέση ισορροπίας του χωρίς ποτέ να την ξεπεράσει.



Σχήμα 18: Η απομάκρυνση χρονικά της κρίσιμης και υπερκρίσιμης φθίνουσας «ταλάντωσης» του παραδείγματος από την οποία φαίνεται ότι για μεγαλύτερη απόσβεση η κίνηση προς τη θέση ισορροπίας είναι πιο αργή

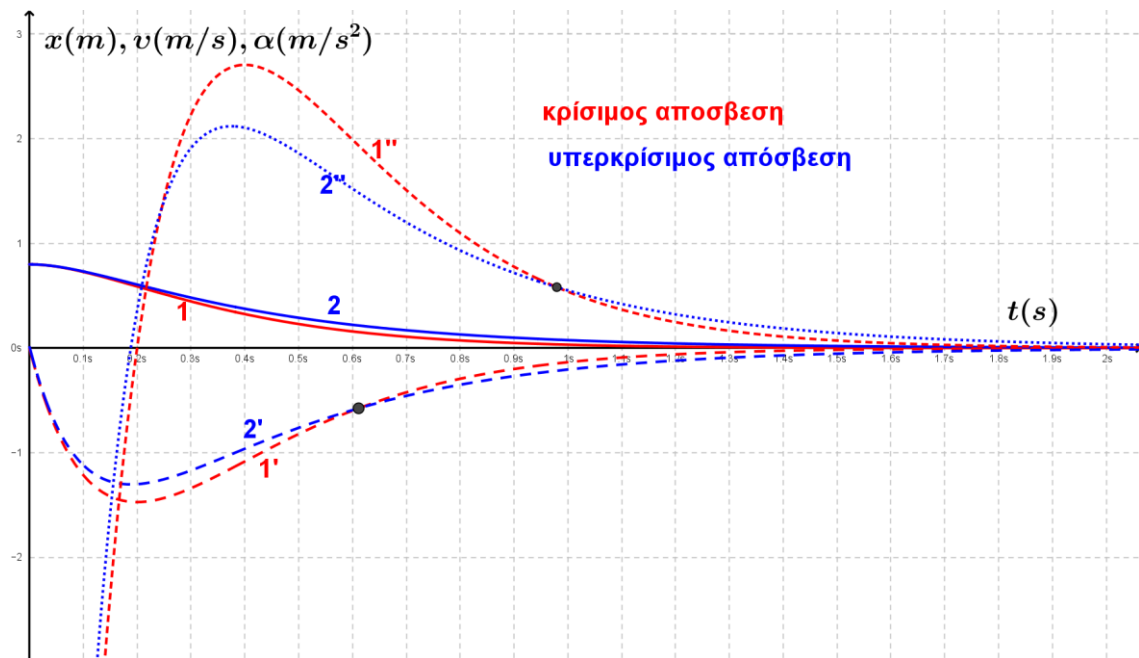
Για την κρίσιμο απόσβεση έχουμε (κόκκινες καμπύλες του επόμενου σχήματος):

$$x(t) = (0,8 + 4t)e^{-5t} \geq 0$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 4e^{-5t} + (0,8 + 4t)e^{-5t}(-5) = -20te^{-5t} \leq 0$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -20e^{-5t} - 20te^{-5t}(-5) = -20e^{-5t}(1 - 5t) \rightarrow (a = 0, v = \max) \rightarrow t = 0,2 \text{ s}$$

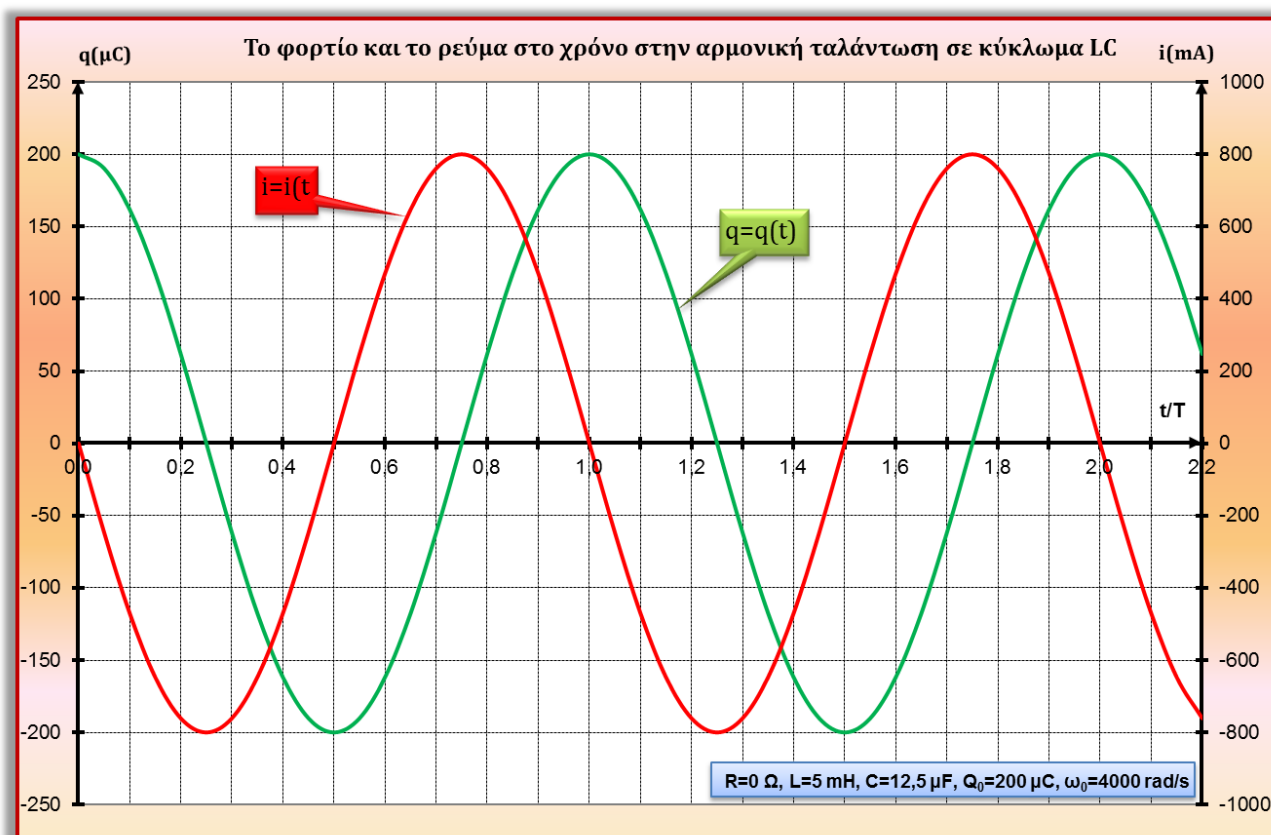
$$\frac{da}{dt} = 100e^{-5t}(1 - 5t) - 20e^{-5t}(-5) = (200 - 500t)e^{-5t} = 0 \rightarrow a = \max \rightarrow t = 0,4 \text{ s}$$



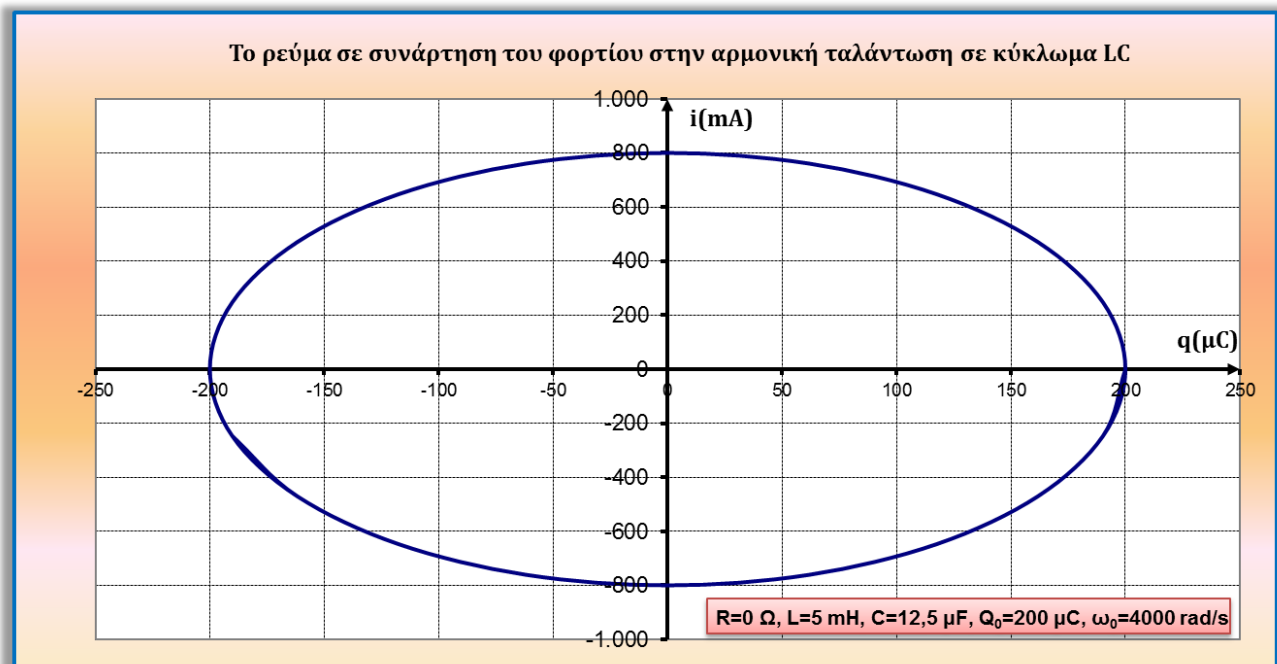
Σχήμα 19: Η απομάκρυνση σε συνάρτηση του χρόνου για την κρίσιμο (συνεχής καμπύλη 1, κόκκινη) και υπερκρίσιμο (συνεχής καμπύλη 2, μπλε) φθίνουσα ταλάντωση του παραδείγματος. Οι διακεκομμένες καμπύλες με έναν τόνο αναφέρονται στις ταχύτητες και οι διακεκομμένες με δύο τόνους στις επιταχύνσεις των αντίστοιχων ταλαντώσεων. Και στις δύο περιπτώσεις η ταχύτητα με την οποία πλησιάζουν τη θέση ισορροπίας από αυξανόμενη (απολύτως) μετατρέπεται σε μειούμενη μετά από κάποια χρονική στιγμή (μηδενισμός επιτάχυνσης, σημείο καμπής). Η αλλαγή αυτή γίνεται νωρίτερα για αυτή με τη μεγαλύτερη απόσβεση (υπερκρίσιμος) και μάλιστα μετά από κάποια χρονική στιγμή (οδεύοντας προς το μηδενισμό τους και οι δύο) έχει και μεγαλύτερη (απολύτως) ταχύτητα. Μέχρι τη μεγιστοποίηση της ταχύτητας ($x > 0$, $v < 0$) ισχύει η $k|x| - b|v| = m|a| > 0$, ($a < 0$). Η διαφορά (και η επιτάχυνση) μικραίνει (απολύτως) μέχρι $k|x| - b|v| = m|a| = 0$ όταν μεγιστοποιείται η ταχύτητα. Στη συνέχεια $k|x| - b|v| = -m|a| < 0$ με τη διαφορά να μεγαλώνει αρχικά (και η επιβράδυνση) και στη συνέχεια να μειώνεται μέχρι μηδενισμού

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

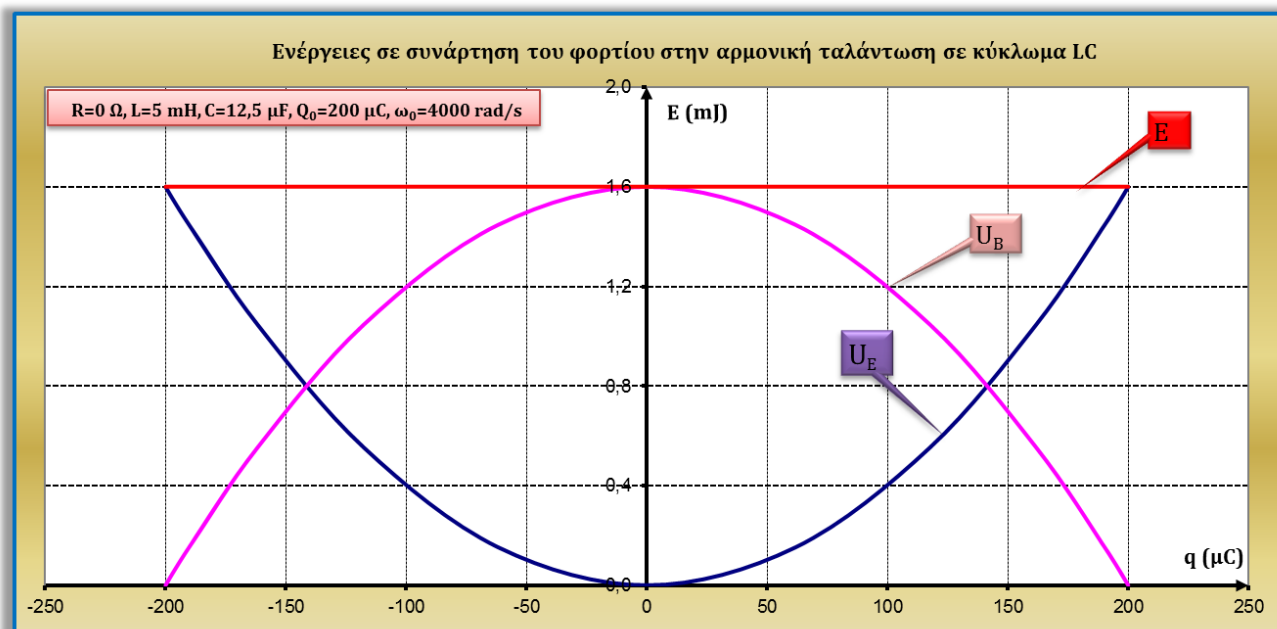
Τα επόμενα διαγράμματα αναφέρονται σε ηλεκτρικές ταλαντώσεις και έχουν κατασκευαστεί με χρήση του Excel. Τα στοιχεία του ελάχιστου κυκλώματος είναι αποτυπωμένα πάνω στο διάγραμμα. Για λόγους σύγκρισης απεικονίζονται και τα αντίστοιχα διαγράμματα των απλών αρμονικών ταλαντώσεων.



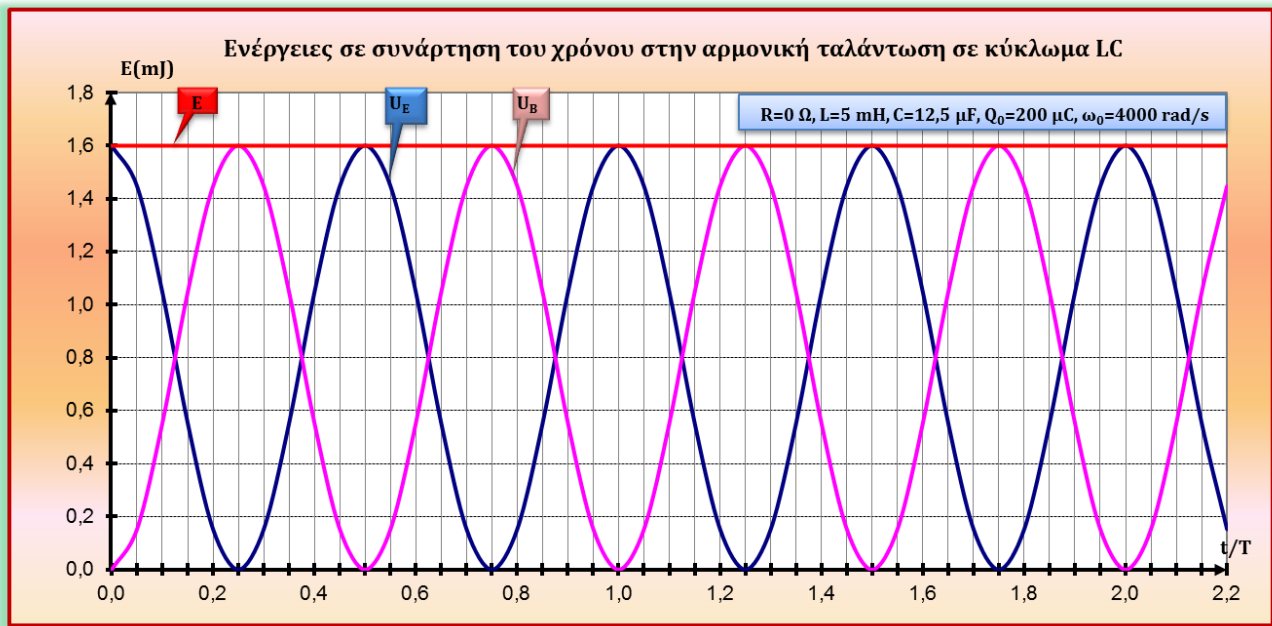
Σχήμα 20: Φορτίζουμε τον πυκνωτή με φορτίο $Q = 200 \mu\text{C}$ ιδανικού κυκλώματος LC με ανοικτό διακόπτη. Την $t = 0$ κλείνουμε τον διακόπτη και το κύκλωμα την εκτελεί απλές αρμονικές ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Οι αποδιδόμενες γραφικά συναρτήσεις είναι: $q(t) = (200 \mu\text{C}) \cos[4000(t/T_0)]$ και $i(t) = -(800 \text{ mA}) \sin[4000(t/T_0)]$ σε συνάρτηση του t/T_0 . Ο αριστερός κατακόρυφος άξονας αναφέρεται στο φορτίο και ο δεξιός στο ρεύμα. Η ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος είναι $\omega_0 = 4000 \text{ rad/s}$ και η ιδιοπερίοδος $T_0 = 1,571 \text{ ms}$



Σχήμα 21: Στο ίδιο ιδανικό κύκλωμα LC το ρεύμα σε συνάρτηση του φορτίου, οπότε προκύπτει η έλλειψη $\frac{i^2}{I^2} + \frac{q^2}{Q^2} = 1$ ή $\frac{i^2}{800^2} + \frac{q^2}{200^2} = 1$. Οι συντεταγμένες ενός κινούμενου σημείου που ξεκινά από το σημείο $200 \mu\text{C}$ του άξονα των φορτίων και κινούμενο πάνω στην έλλειψη με γωνιακή συχνότητα ω_0 , κατά τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού, αποδίδει τις τιμές των μεγεθών φορτίο και ρεύμα κατά τη διάρκεια της περιόδου



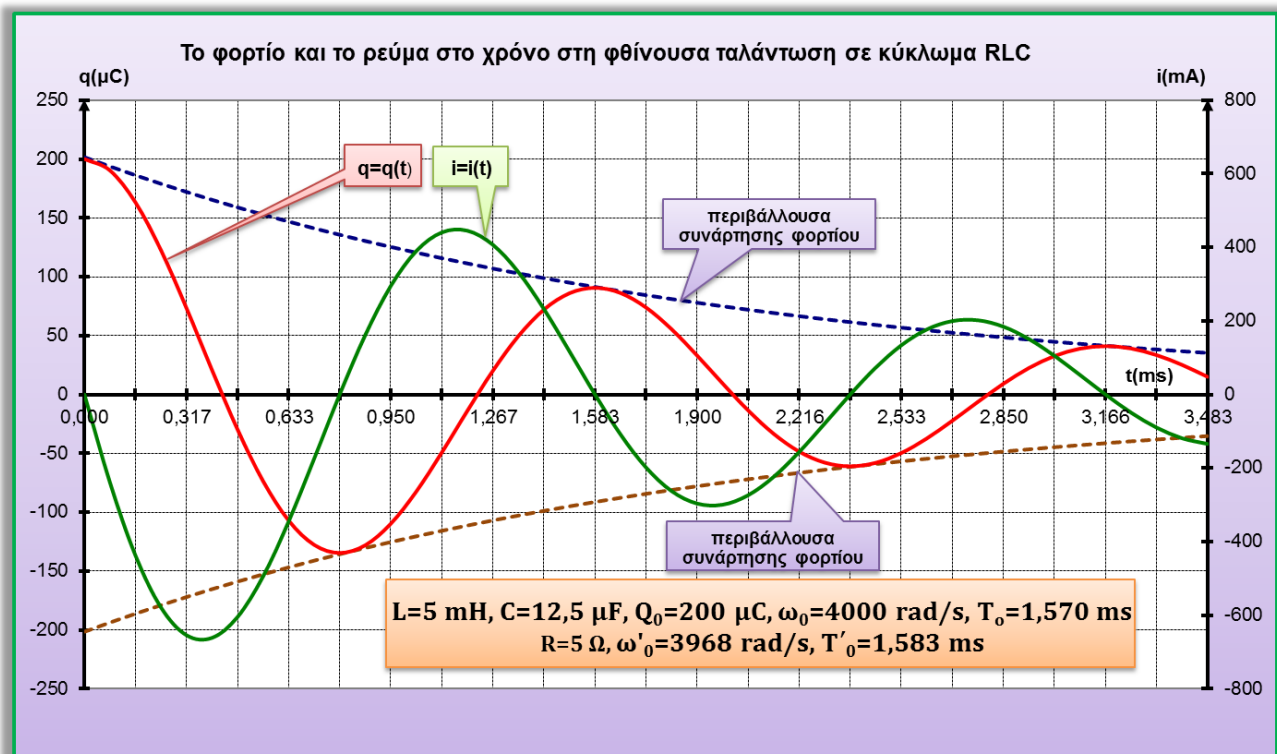
Σχήμα 22: Στο ίδιο ιδανικό κύκλωμα LC οι ενέργειες σε συνάρτηση του φορτίου του πυκνωτή. Οι αποδιδόμενες συναρτήσεις είναι: $E = \text{σταθ.} = 1,6 \text{ J}$, $U_E = \frac{1}{2C} q^2$ και $U_B = E - \frac{1}{2C} q^2$ (παραβολές) με $q \in [-Q, +Q]$



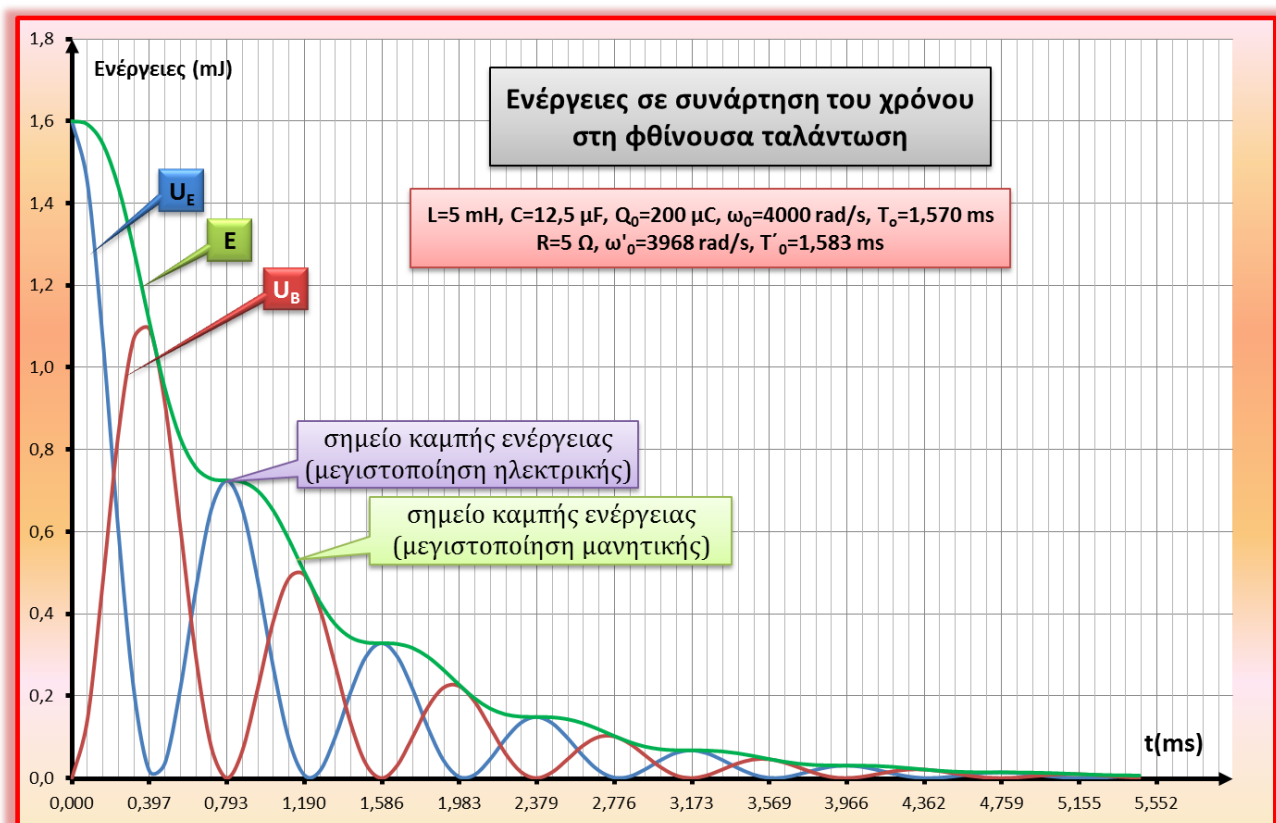
Σχήμα 23: Στο ίδιο ιδανικό κύκλωμα LC οι ενέργειες σε συνάρτηση του χρόνου. Οι αποδιδόμενες συναρτήσεις είναι:

$$E = \text{σταθ.} = 1,6 \text{ J}, U_E = 1,6 \cos^2 [4000(t/T_0)] = 0,8 + 0,8 \cos [8000(t/T_0)] \text{ και}$$

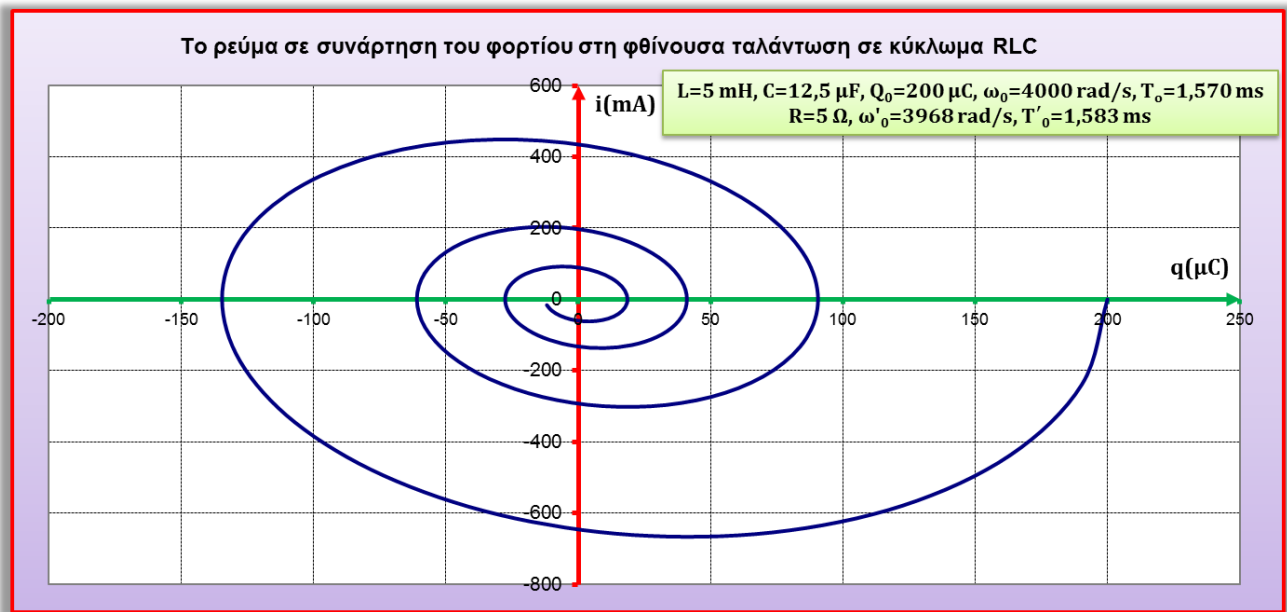
$U_B = 1,6 \sin^2 [4000(t/T_0)] = 0,8 - 0,8 \cos [8000(t/T_0)]$ σε συνάρτηση του t/T_0 . Από το σχήμα φαίνεται ότι οι ενέργειες «ταλαντώνονται» με διπλάσια συχνότητα από ότι τα μεγέθη φορτίο, ρεύμα, κλπ



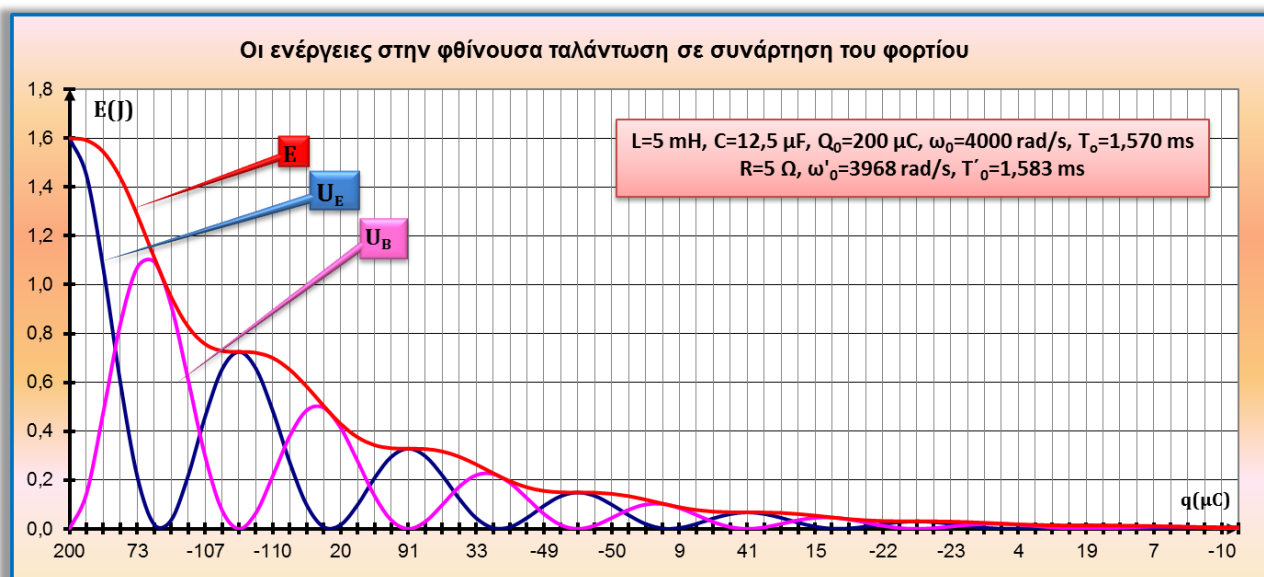
Σχήμα 24: Στο ίδιο κύκλωμα LC έχουμε παρεμβάλλει ωμική αντίσταση $R = 5 \Omega$ (υποκρίσιμος) και διεγείρεται όπως και πριν. Η ταλάντωση μετατρέπεται από αμείωτη σε φθίνουσα, οπότε τα «πλάτη» των μεγεθών φορτίο και ρεύμα μειώνονται εκθετικά με το χρόνο (η εκθετική μείωση του πλάτους του φορτίου είναι σχεδιασμένη). Από τη σύγκριση των σχημάτων φαίνεται ότι η περίοδος αυξήθηκε (λίγο) από την τιμή $1,571 \text{ ms}$ σε $1,583 \text{ ms}$, ενώ η γωνιακή συχνότητα μειώθηκε (λίγο) από 4000 rad/s σε 3968 rad/s . Η αποδιδόμενη για το φορτίο συνάρτηση είναι $q(t) = Q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \cos \omega'_0 t = (200 \mu\text{C}) e^{-1000t} \cos(3968t)$. Η «φθορά» της ταλάντωσης μπορεί να αποδοθεί από το χρόνο υποδιπλασιασμού του πλάτους $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\Lambda}$ όπου $\Lambda = \frac{R}{2L}$



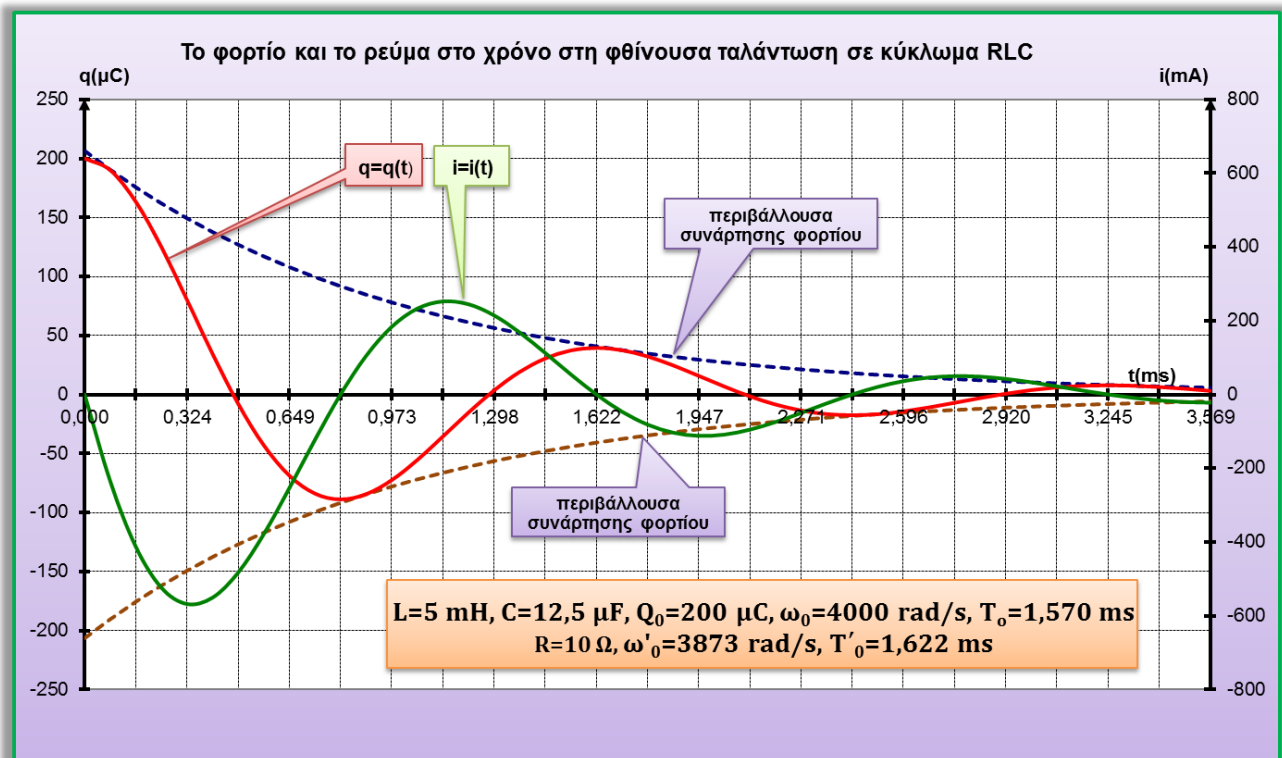
Σχήμα 25: Οι ενέργειες σε συνάρτηση του χρόνου στη φθίνουσα ταλάντωση με υποκρίσιμο απόσβεση. Η ολική ενέργεια μειώνεται «κλιμακωτά» και προφανώς δεν μειώνεται εκθετικά. Εφάπτεται της ηλεκτρικής στις μέγιστες τιμές της και της μαγνητικής όταν το φορτίο είναι μηδέν που δεν είναι οι μέγιστες τιμές της και παρουσιάζει σημεία καμψής κατά τη μεγιστοποίηση και των δύο



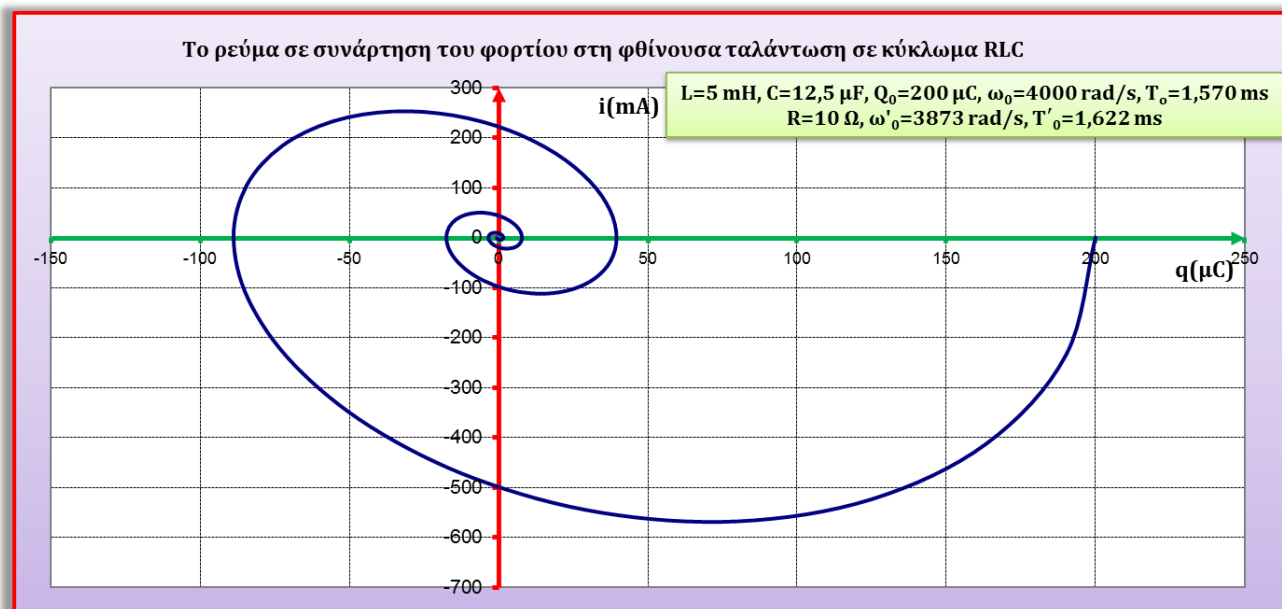
Σχήμα 26: Στο ίδιο κύκλωμα RLC το ρεύμα σε συνάρτηση του φορτίου. Οι συνεταγμένες ενός σημείου που ξεκινά από το σημείο $200 \text{ } \mu\text{C}$ του άξονα των φορτίων και κινούμενο πάνω στην καμπύλη με γωνιακή συχνότητα $\omega_1 = 3968 \text{ rad/s}$ κατά τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού αποδίδει τις τιμές των μεγεθών φορτίο και ρεύμα. Η καμπύλη δεν είναι πλέον έλλειψη, αφού τα «πλάτη» των μεγεθών μειώνονται καθώς εξελίσσεται η ταλάντωση



Σχήμα 27: Στο ίδιο κύκλωμα RLC οι ενέργειες σε συνάρτηση του φορτίου του πυκνωτή



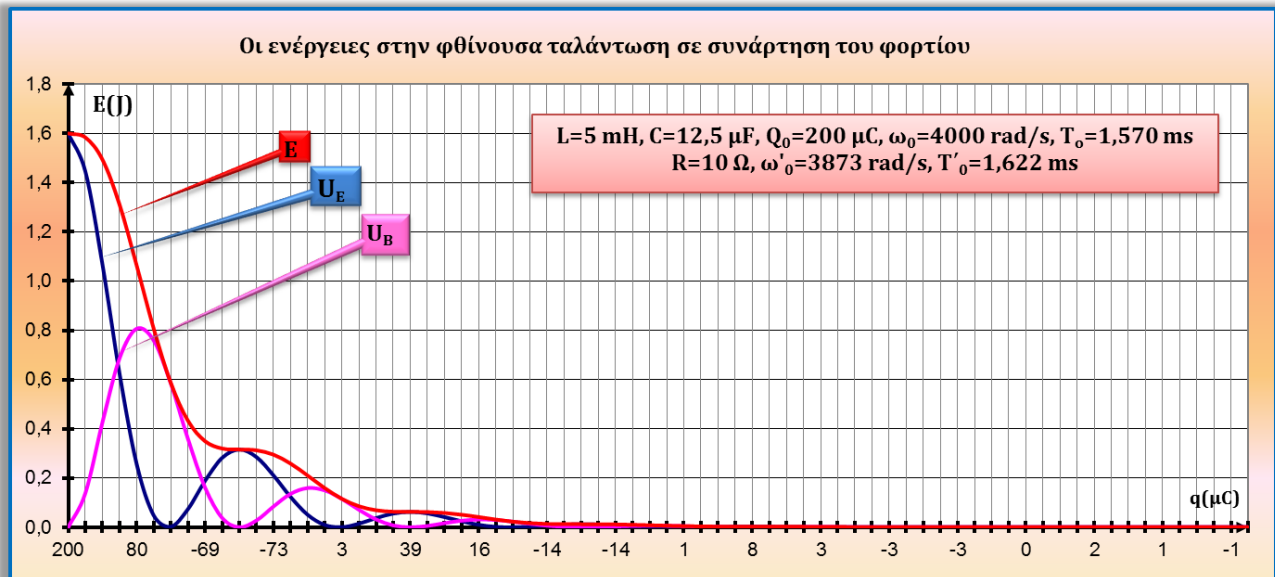
Σχήμα 28: Τα ίδια με **Σχήμα 24** με τη διαφορά ότι έχουμε αυξήσει την ωμική αντίσταση σε $R=10 \Omega$. Η ταλάντωση φθίνει τώρα πιο γρήγορα με περίοδο (αυξήθηκε ακόμα λίγο) $1,622 \text{ ms}$ και γωνιακή συχνότητα (μειώθηκε ακόμα λίγο) 3873 rad/s . Ο χρόνος υποδιπλασιασμού μίκρυνε



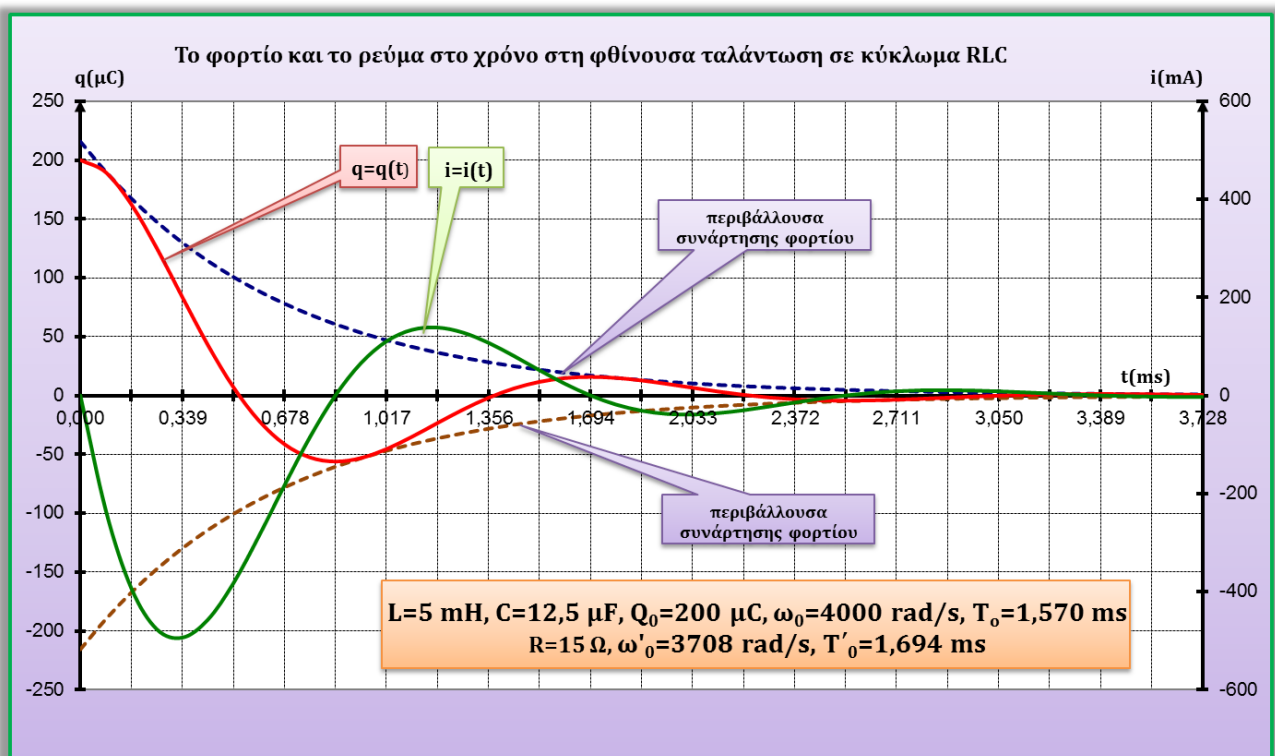
Σχήμα 29: Όμοια όπως στο **Σχήμα 26** με $R=10 \Omega$. Οι συντεταγμένες ενός σημείου που ξεινά από το σημείο $200 \mu\text{C}$ του άξονα των φορτίων και κινούμενο πάνω στην καμπύλη πιο αργά με γωνιακή συχνότητα $\omega = 3873 \text{ rad/s}$

κατά τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού αποδίδει τις τιμές των μεγεθών φορτίο και ρεύμα

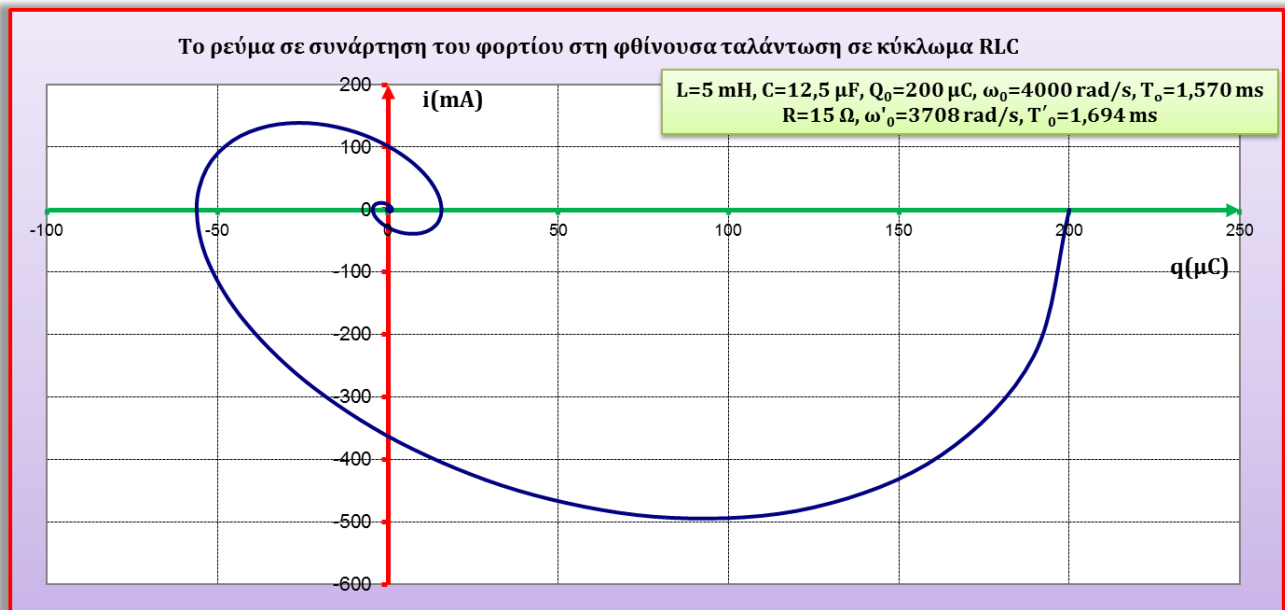
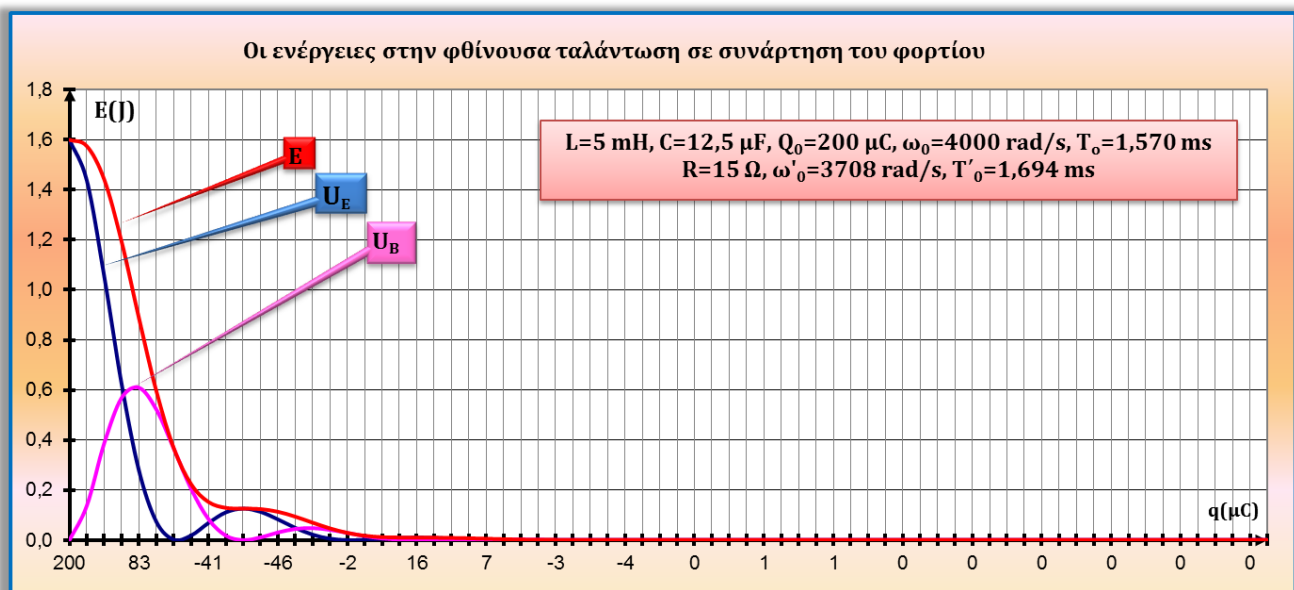
61/73

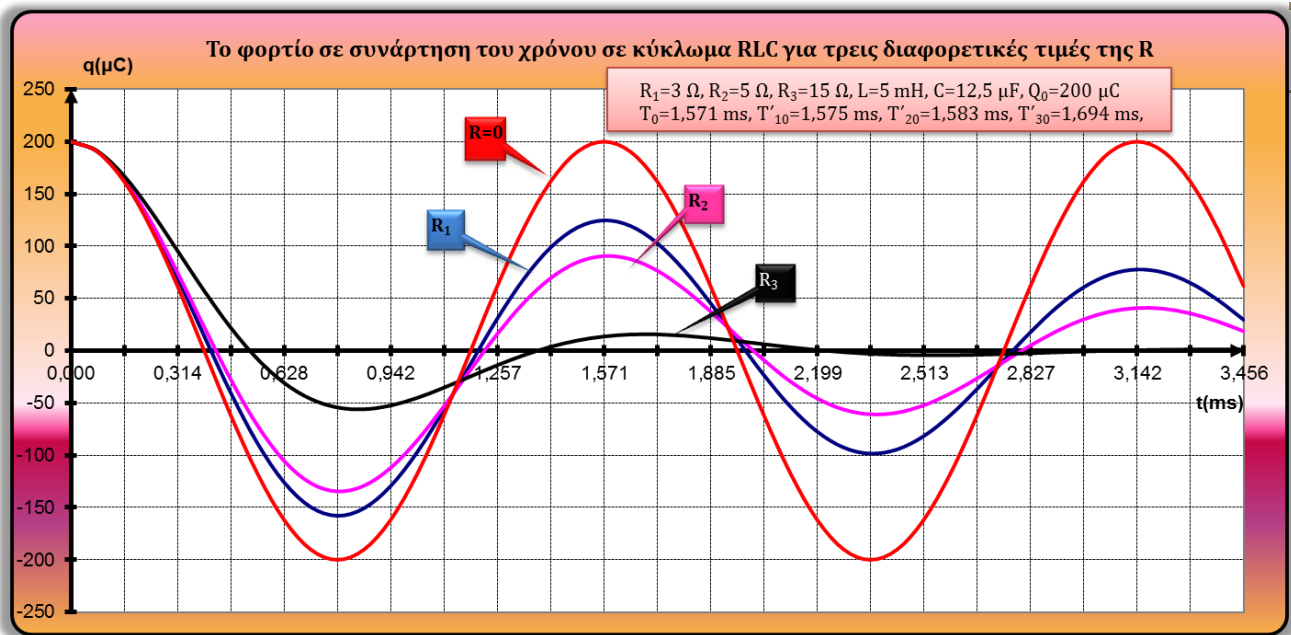


Σχήμα 30: Όπως στο Σχήμα 27 με $R=10 \text{ }\Omega$



Σχήμα 31: Όπως στο Σχήμα 24 και Σχήμα 28 με $R=15 \text{ }\Omega$. Η ταλάντωση υφίσταται ακόμα πιο γρήγορη φθορά. Ο χρόνος υποδιπλασιασμού μικρυνε και άλλο, όπως επίσης και η γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης (3708 rad/s), ενώ η περίοδος αυξήθηκε λίγο ακόμα σε $1,694 \text{ ms}$

Σχήμα 32: Όπως στο Σχήμα 26 και Σχήμα 29 με $R=15\text{ }\Omega$ Σχήμα 33: Όπως στο Σχήμα 27 και Σχήμα 30 με $R=15\text{ }\Omega$



Σχήμα 34: Το φορτίο σε συνάρτηση του χρόνου με ίδια διέγερση, ίδια L και C, για τρεις διαφορετικές τιμές της R (όλες υποκρισίσιμες). Παρατηρούμε ότι καθώς μεγαλώνει η απόσβεση R η περίοδος αυξάνεται και η ταλάντωση φθίνει γρηγορότερα (μικραίνει ο χρόνος υποδιπλασιασμού)

ΣΥΝΟΨΙΣΗ

Η εξίσωση κίνησης συστήματος «ελατηρίου-μάζας» που υπόκειται σε δύναμη αντίστασης της μορφής $F = -b \cdot v$, είναι η:

$$F_{\text{επαν.}} + F_{\text{αποσβ.}} = ma \quad \text{ή} \quad -kx - bv = ma \quad \text{ή}$$

$$ma + bv + kx = 0 \quad \text{ή} \quad a + \frac{b}{m}v + \frac{k}{m}x = 0 \quad \text{ή} \quad \ddot{x} + 2\Lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{όπου} \quad \Lambda = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Για $\Lambda < \omega_0 \rightarrow b < 2\sqrt{mk} = 2m\omega_0$, οι λύσεις είναι οι συζυγείς μιγαδικές $\lambda = -\Lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2} = -\Lambda \pm i\omega'_0$, όπου $\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2}$, οπότε η λύση της διαφορικής θα είναι της μορφής

$$x(t) = ce^{-\Lambda t} \cos(\omega'_0 t - \phi_0) \quad \text{με} \quad \Lambda = \frac{b}{2m} \quad \text{και} \quad \omega'_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2} < \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Καθορίζοντας τις αρχικές συνθήκες προσδιορίζουμε τη σταθερά c και τη γωνία ϕ_0 .

Αν περιοριστούμε στην περίπτωση **(σχολικού βιβλίου)** με αρχικές συνθήκες $x(0) = A_0$ και $v(0) = \dot{x}(0) = 0$, βρισκουμε

$$x(t) = A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \cos(\omega'_0 t - \phi_0), \quad t \geq 0 \quad \text{με} \quad \tan \phi_0 = \frac{\Lambda}{\omega'_0}, \quad \sin \phi_0 = \frac{\Lambda}{\omega_0}, \quad \cos \phi_0 = \frac{\omega'_0}{\omega_0}$$

- **Η απομάκρυνση x** (κάτι ανάλογο αντίστοιχο συμβαίνει και με όλα τα άλλα εμπλεκόμενα μεγέθη) αποδίδεται από ένα γινόμενο που αποτελείται από τον όρο « $A(t) = A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda t}$ » που μειώνεται εκθετικά με το χρόνο και (ιαταχρηστικώς) τον ονομάζουμε «**πλάτος**» και έναν αρμονικά μεταβαλλόμενο όρο, τον $\cos(\omega'_0 t - \phi_0)$, που έχει γωνιακή συχνότητα $\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2} < \omega_0$ και η ύπαρξη του οποίου προσδίδει μια «περιοδικότητα» στην κίνηση. (μηδενισμός του συνημίτονου σημαίνει και μηδενισμό του x , ενώ μεγιστοποίησή του συνημίτονου δεν σημαίνει απαραίτητα και μεγιστοποίηση του x). Έτσι: **Η απομάκρυνση δεν μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο**
- ϕ_0 γωνία που καθορίζεται (με δεδομένες τις αρχικές συνθήκες) από τα χαρακτηριστικά του συστήματος και την ονομάζουμε «**αρχική φάση!!!**».
- ω_0 η γωνιακή συχνότητα της απλής αρμονικής ταλάντωσης που θα εκτελούσε το ίδιο σύστημα (ελεύθερα) αν διεγειρόταν, χωρίς απόσβεση, και επειδή εξαρτάται μόνο από τη φύση του συστήματος αποκαλείται **γωνιακή ιδιοσυχνότητα** (ή **φυσική συχνότητα**) **χωρίς απόσβεση**.
- ω'_0 η γωνιακή συχνότητα μεταβολής του συνημίτονου και επειδή και αυτή εξαρτάται μόνο από τη φύση του συστήματος την αποκαλούμε **γωνιακή ιδιοσυχνότητα** (ή **φυσική συχνότητα**) **με απόσβεση** (του ίδιου συστήματος).

- Η ταχύτητα $v(t) = \frac{d}{dt}[x(t)] = -A_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0'} e^{-\Lambda t} \sin(\omega_0' t)$

- Η επιτάχυνση $a(t) = \frac{d}{dt}[v(t)] = -A_0 \frac{\omega_0^3}{\omega_0'} e^{-\Lambda t} \cos(\omega_0' t + \phi_0)$

- Η **διαφορά φάσης** των αρμονικών όρων της ταχύτητας και της απομάκρυνσης (ομοίως της επιτάχυνσης και της ταχύτητας) δεν είναι (πλέον) $\frac{\pi}{2}$ αλλά $\frac{\pi}{2} + \phi_0$ (που σημαίνει ότι από μηδενισμό της απομάκρυνσης μέχρι τον αμέσως επόμενο μηδενισμό της ταχύτητας περνά μικρότερος χρόνος του $\frac{1}{4}T_0'$ κατά περνά $\frac{\phi_0}{2\pi}T_0'$ (στην απλή αρμονική ταλάντωση ο χρόνος είναι $\frac{1}{4}T_0'$). Επίσης, η διαφορά φάσης της επιτάχυνσης και της απομάκρυνσης δεν είναι (πλέον) π αλλά $\pi + 2\phi_0$ (που σημαίνει ότι από μηδενισμό της επιτάχυνσης μέχρι τον αμέσως επόμενο μηδενισμό της απομάκρυνσης περνά χρόνος $2\frac{\phi_0}{2\pi}T_0'$ (στην απλή αρμονική ταλάντωση συμβαίνουν ταυτόχρονα).

- Η **δύναμη επαναφοράς**

$$F_{\text{επαν.}} = -kx = -kA_0 \frac{\omega_0}{\omega_0'} e^{-\Lambda t} \cos(\omega_0' t - \phi_0) = -mA_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0'} e^{-\Lambda t} \cos(\omega_0' t - \phi_0)$$

- Η **δύναμη απόσβεσης**

$$F_{\text{αποσβ.}} = -bv = bA_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0'} e^{-\Lambda t} \sin(\omega_0' t) = 2mA_0 \frac{\Lambda \omega_0^2}{\omega_0'} e^{-\Lambda t} \sin(\omega_0' t) = 2kA_0 \frac{\Lambda}{\omega_0'} e^{-\Lambda t} \sin(\omega_0' t)$$

- Η **συνολικά ασκούμενη δύναμη**

$$F_{\text{επαν.}} + F_{\text{αποσβ.}} = ma = -mA_0 \frac{\omega_0^3}{\omega_0'} e^{-\Lambda t} \cos(\omega_0' t + \phi_0)$$

- Η **δυναμική ενέργεια**

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \left(\frac{1}{2}kA_0^2\right) \frac{\omega_0}{\omega_0'^2} e^{-2\Lambda t} \cos^2(\omega_0' t - \phi_0)$$

- Η **κινητική ενέργεια**

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \overbrace{\left(\frac{1}{2} k A_0^2\right)}^{E_0} \frac{\omega_0^2}{\omega_0'^2} e^{-2\Lambda t} \sin^2(\omega_0' t)$$

- **Η ολική ενέργεια**

$$E = E_0 \frac{\frac{1}{2} k A_0^2}{\omega_0'^2} e^{-2\Lambda t} \left[1 + \frac{\Lambda}{\omega_0} \sin(2\omega_0' t - \phi_0) \right]$$

Από τη θέση $x = 0$

- περνά τις χρονικές στιγμές $t_1 = (2n+1) \frac{T_0'}{4} + \frac{\phi_0}{2\pi} T_0'$, $n \in \mathbb{N}$ σχέση που δείχνει ότι από τη θέση ισορροπίας δεν περνά χρονικές στιγμές που είναι περιττά πολλαπλάσια του $\frac{T_0'}{4}$, αλλά λίγο μετά (κατά $\frac{\phi_0}{2\pi} T_0'$) από αυτές (το φαινόμενο γίνεται εντονότερο αν $b \uparrow \rightarrow \Lambda \uparrow$, $\omega_0' \downarrow$, $T_0' \uparrow$, $\phi_0 \uparrow$, $\phi_0 \cdot T_0' \uparrow$ και θα εξαιρεφόταν αν $b \rightarrow 0$)

- με ταχύτητα $v(x=0) = \mp A_0 \omega_0 e^{-\Lambda t_1}$

- με επιτάχυνση $a(x=0) = \pm 2A_0 \omega_0 \Lambda e^{-\Lambda t_1}$

- με δύναμη επαναφοράς $F_{\text{επαν.}} = 0$

- με δύναμη απόσβεσης $F_{\text{αποσβ.}} = -bv = b \cdot (\mp A_0 \omega_0 e^{-\Lambda t_1}) = \pm b A_0 \omega_0 e^{-\Lambda t_1}$

- με συνολικά ασκούμενη δύναμη $F_{\text{επαν.}} + F_{\text{αποσβ.}} = ma = m(\pm 2A_0 \omega_0 \Lambda e^{-\Lambda t_1}) = \pm b A_0 \omega_0 e^{-\Lambda t_1}$

- με δυναμική ενέργεια $U = 0$

- με κινητική ενέργεια $K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\mp A_0 \omega_0 e^{-\Lambda t_1})^2 = \overbrace{\left(\frac{1}{2} k A_0^2\right)}^{E_0} e^{-2\Lambda t_1} = E_0 e^{-2\Lambda t_1}$

- με ολική ενέργεια $E = E_0 \frac{\frac{1}{2} k A_0^2}{\omega_0'^2} e^{-2\Lambda t_1} \left[1 + \frac{\Lambda}{\omega_0} \sin(2\omega_0' t_1 - \phi_0) \right] = E_0 e^{-2\Lambda t_1} = K$, σημεία επαφής της με K

Η ταχύτητα μηδενίζεται $v = 0$

- τις χρονικές στιγμές $t_2 = n \frac{T_0'}{2}$, $n \in \mathbb{N}$ που σημαίνει ότι τις ίδιες χρονικές στιγμές

- η απομάκρυνση εμφανίζει ακρότατα (μέγιστα), τα $x_{\max} = \pm A_0 e^{-\Lambda t_2}$. Έτσι τις **διακριτές** στιγμές

$t_2 = n \frac{T'_0}{2}$, $n \in N$ η $x = x(t)$ και οι καμπύλες $(\pm) A_0 e^{-\Lambda t}$ τέμνονται, δηλ. οι $(\pm) A_0 e^{-\Lambda t}$ δεν αποτελούν περιβάλλουσες της $x = x(t)$

- με επιτάχυνση $a(v=0) = \mp A_0 \omega_0^2 \cdot e^{-\Lambda t_2}$
- με δύναμη επαναφοράς $F_{\text{επαν.}}(v=0) = -kx_{\text{max}} = \mp kA_0 e^{-\Lambda t_2}$
- με δύναμη απόσβεσης $F_{\text{αποσβ.}} = -bv = 0$
- με συνολικά ασκούμενη δύναμη $F_{\text{επαν.}} + F_{\text{αποσβ.}} = ma = m(\mp A_0 \omega_0^2 \cdot e^{-\Lambda t_2}) = \mp kA_0 e^{-\Lambda t_2}$
- με δυναμική ενέργεια $U_{\text{μέγιστα}} = \left(\frac{1}{2} kA_0^2\right) e^{-2\Lambda t_2} = E_0 e^{-2\Lambda t_2}$
- με κινητική ενέργεια $K = \frac{1}{2} m v^2 = 0$
- με ολική ενέργεια $E = E_0 e^{-2\Lambda t_1} = U$, σημεία καμπής της και επαφής της με U

Η ταχύτητα μεγιστοποιείται ($a = 0$)

- Τις χρονικές $t_3 = (2n+1) \frac{T'_0}{4} - \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$, $n \in N$
- με απομάκρυνση $x(v_{\text{max}}) = \pm 2A_0 \frac{\Lambda}{\omega_0} e^{-\Lambda t_3}$
- με ταχύτητα $v_{\text{max}} = \mp A_0 \omega_0 e^{-\Lambda t_3}$
- με δύναμη επαναφοράς $F_{\text{επαν.}} = -kx = \mp 2kA_0 \frac{\Lambda}{\omega_0} e^{-\Lambda t_3}$
- με δύναμη απόσβεσης $F_{\text{αποσβ.,max}} = -bv = \pm 2kA_0 \frac{\Lambda}{\omega_0} e^{-\Lambda t_3}$
- με συνολικά ασκούμενη δύναμη $F_{\text{επαν.}} + F_{\text{αποσβ.}} = ma = 0$
- με δυναμική ενέργεια $U = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} k \left[\mp 2A_0 \frac{\Lambda}{\omega_0} e^{-\Lambda t_3} \right]^2 = \left(\frac{1}{2} kA_0^2\right) \frac{4\Lambda^2}{\omega_0^2} e^{-2\Lambda t_3} = E_0 \frac{4\Lambda^2}{\omega_0^2} e^{-2\Lambda t_3}$

- με κινητική ενέργεια $K_{\text{μεγιστα}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left[\mp A_0 \omega_0 \cdot e^{-\Lambda t_3} \right]^2 = \left(\frac{1}{2} k A_0^2 \right) e^{-2\Lambda t_3} = E_0 e^{-2\Lambda t_3}$
- με ολική ενέργεια

$$E = E_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0'^2} e^{-2\Lambda t_3} \left[1 + \frac{\Lambda}{\omega_0} \sin(2\omega_0' t_3 - \phi_0) \right] = E_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0'^2} e^{-2\Lambda t_3} \left[1 + \frac{\Lambda}{\omega_0} (3 \sin \phi_0 - 4 \sin^3 \phi_0) \right] =$$

$$= \dots = \left(\frac{4\Lambda^2}{\omega_0^2} + 1 \right) E_0 e^{-2\Lambda t_3}, \text{ σημεία}$$

καμπής της

Τις χρονικές στιγμές

1. $t = n \frac{T_0'}{2}, n \in N$
 - A. μεγιστοποιείται η απομάκρυνση και η δυναμική ενέργεια
 - B. μηδενίζεται η ταχύτητα και η κινητική ενέργεια
 - Γ. η ολική ενέργεια εμφανίζει σημείο καμπής, γίνεται ίση με τη δυναμική ενέργεια και οι δύο καμπύλες εφάπτονται
 - Δ. τέμνονται η $x = x(t)$ και οι καμπύλες $(\pm) A_0 e^{-\Lambda t}$
2. $t = (2n+1) \frac{T_0'}{4} - \frac{\phi_0}{2\pi} T_0', n \in N$
 - A. μεγιστοποιείται η ταχύτητα και η κινητική ενέργεια
 - B. η ολική ενέργεια είναι μεγαλύτερη από την κινητική και οι δύο καμπύλες δεν έχουν κοινό σημείο
 - Γ. η ολική ενέργεια εμφανίζει σημείο καμπής
3. $t = n \frac{T_0'}{2} + \frac{\phi_0}{\pi} T_0', n \in N$
 - A. τέμνονται η $x = x(t)$ και οι καμπύλες $(\pm) A_0 e^{-\Lambda t}$ (2^ο σημείο τομής)
4. $t = n \frac{T_0'}{2} + \frac{\phi_0}{2\pi} T_0', n \in N$
 - A. μηδενίζεται η απομάκρυνση και η δυναμική ενέργεια
 - B. η κινητική ενέργεια εξισώνεται και εφάπτεται με την ολική ενέργεια

Γ. εφάπτονται η $x = x(t)$ και οι καμπύλες $(\pm) A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\lambda t}$ (περιβάλλουσες)

Γενικές παρατηρήσεις

- ✓ Κανένα μέγεθος δε μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο και κανένα δε μειώνεται εκθετικά με το χρόνο (όλα είναι γινόμενα ενός εκθετικά μειούμενου όρου και ενός αρμονικά μεταβαλλόμενου).
- ✓ Μόνο οι διακριτές τιμές των μεγεθών που μελετήσαμε για ($x=0, v=0, a=0$) κλπ μειώνονται εκθετικά με το χρόνο (από μια τιμή στην επόμενη χρονικά).
- ✓ Η κίνηση του σώματος είναι **ταλάντωση**, αφού το σώμα κινείται παλινδρομικά γύρω από τη θέση ισορροπίας, **δεν είναι όμως αρμονική** και προφανώς **δεν είναι ούτε περιοδική**, αφού δεν επαναλαμβάνεται ακριβώς η ίδια, μιας και το λεγόμενο «πλάτος» που συνοδεύει τον αρμονικό όρο σε όλα τα μεγέθη μειώνεται εκθετικά με το χρόνο
- ✓ Η μεγιστοποίηση της ταχύτητας και της κινητικής ενέργειας συμβαίνει κατά $\Delta t = \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$ πριν το σώμα περάσει από τη θέση $x=0$ και όλο και πιο κοντά της, καθώς η ταλάντωση εξελίσσεται. Αλλιώς, καθώς το σώμα ξεκινά από ακραία θέση και οδεύει προς τη θέση ισορροπίας η συνολικά ασκούμενη δύναμη μηδενίζεται πριν περάσει από τη θέση ισορροπίας.
- ✓ Από ακραία θέση στην επόμενη ακραία περνά χρόνος $T'_0/2$. Από ακραία θέση στη θέση ισορροπίας ($x=0$) ο χρόνος είναι $T'_0/4 + \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0 > T'_0/4$ και από τη θέση ισορροπίας στην αμέσως επόμενη ακραία ο χρόνος είναι $T'_0/4 - \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0 < T'_0/4$. Με άλλα λόγια ο χρόνος προς τη θέση ισορροπίας από ακραία θέση είναι μεγαλύτερος από τη θέση ισορροπίας προς ακραία θέση. Αυτή η διαφορά διατηρείται καθ' όλη την ταλάντωση παρόλο που οι θέσεις μεγιστοποίησης της ταχύτητας πλησιάζουν όλο και περισσότερο τη θέση ισορροπίας.
- ✓ Από τη θέση μεγιστοποίησης της ταχύτητας μέχρι τη θέση $x=0$ επιβραδύνεται (και στη συνέχεια μέχρι την άλλη ακραία θέση) και η χρονική διαφορά των δύο θέσεων είναι $\Delta t = 2 \left(\frac{\phi_0}{2\pi} T'_0 \right)$
- ✓ Κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης (ξεκινώντας από ακραία θέση) στο επόμενο τέταρτο της «περιόδου» θα βρίσκεται ανάμεσα στη θέση μεγιστοποίησης της ταχύτητας και της $x=0$ και το επόμενο τέταρτο θα βρεθεί στην απέναντι ακραία θέση, δηλ. παρόλο που από μέγιστο απομάκρυνσης στο επόμενο στην άλλη πλευρά ο χρόνος είναι $\frac{1}{2} T'_0$, ο χρόνος από μέγιστο σε μηδενισμό (ακραία θέση προς θέση $x=0$) κρατά πάνω από $\frac{1}{4} T'_0$ κατά $\Delta t = \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$, ενώ από μηδενισμό σε μέγιστο λιγότερο από $\frac{1}{4} T'_0$ κατά

$\Delta t = \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$. Δηλ. η «μισή» ταλάντωση, στην οποία το σώμα επιταχύνεται στο μεγαλύτερο διάστημα δι- 71/73

αρκεί περισσότερο κατά $\Delta t = \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$ από την άλλη «μισή» (στην οποία το σώμα επιβραδύνεται σε όλο το χρονικό διάστημα). Η διαφορά «συρρινώνεται» καθώς συνεχίζεται η ταλάντωση.

- ✓ Οι καμπύλες $\pm A_0 \cdot e^{-\lambda t}$ δεν αποτελούν περιβάλλουσες της $x = x(t)$, αφού **τέμνονται** τις $t = n \frac{T'_0}{2}$, $n \in N$ που η $x = x(t)$ εμφανίζει ακρότατα, αλλά και τις $t = n \frac{T'_0}{2} + \frac{\phi_0}{\pi} T'_0$, $n \in N$ (στο μεσο- διάστημα το x είναι μεγαλύτερο), ενώ οι καμπύλες $\pm A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} \cdot e^{-\lambda t}$ αποτελούν περιβάλλουσες, διότι **εφάπτονται** της $x = x(t)$ τις $t = n \frac{T'_0}{2} + \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$, $n \in N$, δηλ. κατά $\frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$ μετά τις μεγιστοποιήσεις της x και πριν κατά $\frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$ τη 2^n τομή των $\pm A_0 \cdot e^{-\lambda t}$ με τη $x = x(t)$
- ✓ Η καμπύλη $E_0 e^{-2\lambda t}$ τέμνεται με την $U = U(t)$ και την $E = E(t)$ τις $t = n \frac{T'_0}{2}$ που μεγιστοποιείται (η απομάκρυνση και) η δυναμική ενέργεια που είναι ίση με την ολική ενέργεια. Τις στιγμές αυτές η $E = E(t)$ εμφανίζει σημεία καμψής ($\frac{dE}{dt} = F_{\text{αποσβ.}} \cdot v = -bv^2 = 0$) στα οποία η κλίση της $E = E(t)$ είναι μηδέν (ως φθίνουσα σε όλο το χρονικό διάστημα της ταλάντωσης, λόγω της απόσβεσης, δεν παρουσιάζει ολικά ακρότατα).
- ✓ Η καμπύλη $E_0 e^{-2\lambda t}$ τέμνεται με την $K = K(t)$ και την $E = E(t)$ τις $t_1 = (2n+1) \frac{T'_0}{4} + \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$ που μηδενίζεται (η απομάκρυνση και) η δυναμική ενέργεια και η κινητική είναι ίση με την ολική ενέργεια. Επίσης και τις στιγμές $t_3 = (2n+1) \frac{T'_0}{4} - \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$ που μεγιστοποιείται (η ταχύτητα και) η κινητική ενέργεια και η $E = E(t)$ εμφανίζει σημεία καμψής.
- ✓ Η $E = E(t)$ είναι μονίμως πάνω από την $U = U(t)$ εκτός από τα ακραία σημεία στα οποία εφάπτονται και πάνω από τη $K = K(t)$ εκτός από τα σημεία με $x = 0$ στα οποία εφάπτονται. Η $E = E(t)$ κατεβαίνει κλιμακωτά με δύο σημεία καμψής ανά σιαλοπάτι (μεγιστοποίηση απομάκρυνσης και μεγιστοποίηση ταχύτητας) κάνοντας μια «στιγμιαία στάση» κάθε φορά που το σώμα βρίσκεται σε ακραία θέση.

ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΥΠΟΚΡΙΣΙΜΗΣ ΦΘΙΝΟΥΣΑΣ

$$F_{\text{επαν.}} + F_{\text{αποσβ.}} = ma \rightarrow -kx - b\dot{x} = ma \rightarrow ma + b\dot{x} + kx = 0 \text{ ή } a + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \text{ ή } \ddot{x} + 2\Lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ όπου } \Lambda = \frac{b}{2m}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Lambda < \omega_0 \rightarrow b < 2\sqrt{mk} = 2m\omega_0, \omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2} < \omega_0, x(0) = A_0 \wedge v(0) = \dot{x}(0) = 0 \rightarrow \tan\phi_0 = \frac{\Lambda}{\omega'_0}, \sin\phi_0 = \frac{\Lambda}{\omega_0}, \cos\phi_0 = \frac{\omega'_0}{\omega_0}, E_0 = \frac{1}{2}kA_0^2$$

απομάκρυνση $x(t)$	$A_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \cos(\omega'_0 t - \phi_0)$	$x = 0, n \in N$ $t_1 = (2n+1) \frac{T'_0}{4} + \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$	$x_{\max} = \pm A_0 e^{-\Lambda t_2}$ τοπικά ακρότατα	$x(v_{\max}) = \pm 2A_0 \frac{\Lambda}{\omega_0} e^{-\Lambda t_3}$
ταχύτητα $v(t) = \frac{dx}{dt}$	$-A_0 \frac{\omega_0^2}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \sin(\omega'_0 t)$	$v(x=0) = \mp A_0 \omega_0 e^{-\Lambda t_1}$	$v = 0, x = \max, n \in N$ $t_2 = n \frac{T'_0}{2}$	$v_{\max} = \mp A_0 \omega_0 e^{-\Lambda t_3}$ τοπικά ακρότατα
επιτάχυνση $a(t) = \frac{dv}{dt}$	$-A_0 \frac{\omega_0^3}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \cos(\omega'_0 t + \phi_0)$	$a(x=0) = \pm 2A_0 \omega_0 \Lambda e^{-\Lambda t_1}$	$a(x_{\max}) = \mp A_0 \omega_0^2 e^{-\Lambda t_2}$	$a = 0, v = \max, n \in N$ $t_3 = (2n+1) \frac{T'_0}{4} - \frac{\phi_0}{2\pi} T'_0$
δύναμη επαναφοράς $F_{\text{επαν.}}(t) = -kx$	$-kA_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \cos(\omega'_0 t - \phi_0)$	0	$\mp kA_0 e^{-\Lambda t_2}$ τοπικά ακρότατα	$\mp 2kA_0 \frac{\Lambda}{\omega_0} e^{-\Lambda t_3}$
δύναμη απόσβεσης $F_{\text{αποσβ.}}(t) = -bv$	$kA_0 \frac{2\Lambda}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \sin(\omega'_0 t)$	$\pm bA_0 \omega_0 e^{-\Lambda t_1}$	0	$\pm 2kA_0 \frac{\Lambda}{\omega_0} e^{-\Lambda t_3}$ τοπικά ακρότατα
συνολική δύναμη $(F_{\text{επαν.}} + F_{\text{αποσβ.}})(t) = ma$	$-kA_0 \frac{\omega_0}{\omega'_0} e^{-\Lambda t} \cos(\omega'_0 t + \phi_0)$	$\pm bA_0 \omega_0 e^{-\Lambda t_1}$	$\mp kA_0 e^{-\Lambda t_2}$	0
δυναμική ενέργεια $U(t) = \frac{1}{2}kx^2$	$E_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0'^2} e^{-2\Lambda t} \cos^2(\omega'_0 t - \phi_0)$	0 ελάχιστα	$E_0 e^{-2\Lambda t_2}$ τοπικά μέγιστα, επαφή	$\frac{4\Lambda^2}{\omega_0^2} E_0 e^{-2\Lambda t_3}$
κινητική ενέργεια $K(t) = \frac{1}{2}mv^2$	$E_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0'^2} e^{-2\Lambda t} \sin^2(\omega'_0 t)$	$E_0 e^{-2\Lambda t_1}$	0 ελάχιστα	$E_0 e^{-2\Lambda t_3}$ τοπικά μέγιστα. επαφή
ολική ενέργεια $(E = U + K)(t)$	$E = E_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0'^2} e^{-2\Lambda t} \left[1 + \frac{\Lambda}{\omega_0} \sin(2\omega'_0 t - \phi_0) \right]$	$E_0 e^{-2\Lambda t_1}$	$E_0 e^{-2\Lambda t_2}$ σημεία καμπής	$\left(\frac{4\Lambda^2}{\omega_0^2} + 1 \right) E_0 e^{-2\Lambda t_3}$ σημεία καμπής

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Halliday – Resnick, Φυσική Α - Β, Εκδόσεις Πνευματικός, 1976
- Halliday – Resnick - Walker, Φυσική, Εκδόσεις Gutenberg, 2014
- Young, Φυσική Α-Β, Εκδόσεις Παπαζήση, 1994
- Ohanian, Φυσική Α, Εκδόσεις Συμμετρία, 1991
- Serway, Φυσική Ι - ΙΙ, 1990
- Alonso Finn, Φυσική Ι – ΙΙ, 1979
- Kenneth Ford, Φυσική 1^{ος} – 2^{ος}, Εκδόσεις Πνευματικού, 2005
- Berkeley, Φυσική 1^{ος} – 2^{ος}, ΕΜΠ, 1978
- Αλεξόπουλος, Φυσική 1^{ος} – 2^{ος}, Παπαζήσης, 1973
- Edminister, Ηλεκτρικά Κυκλώματα, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, ΕΣΠΙ 1980
- Bronson, Διαφορικές Εξισώσεις, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, ΕΣΠΙ 1978
- <http://ylikonet.gr/>