

Θέμα: Ερωτήματα στην αρχή της απροσδιοριστίας.

Στο σχήμα τα ηλεκτρόνια πριν φτάσουν στη σχισμή κινούνται στον άξονα y και έχουν καθορισμένη ορμή μέτρου p_0 . Όσα από αυτά διέρχονται από τη σχισμή αφήνουν στίγμα στο πέτασμα. Από τη θέση του στίγματος προσδιορίζεται η γωνία θ . Το πλάτος της σχισμής L . Η απροσδιοριστία στη θέση x είναι:

$$\Delta x \leq L$$

και δεν έχει κάτω όριο αφού μπορούμε να μικρύνουμε το πλάτος της σχισμής L όσο θέλουμε.

Ερωτήματα:

1. Το ηλεκτρόνιο που αφήνει στίγμα τέτοιο ώστε η γωνία να είναι θ (δες σχήμα), έχει συγκεκριμένη ορμή στον άξονα x που είναι ή $p_x = p_0 \cdot \sin\theta$ ή $p_x = p_0 \cdot \tan\theta$. Μπορούμε να πούμε ότι στο όριο όπου $L=0$ γνωρίζω ακριβώς για αυτό το ηλεκτρόνιο και τη θέση και την ορμή του;
2. Για την ορμή μετά την σχισμή δύο εκδοχές υπάρχουν:

α. Διατηρείται η ορμή στον άξονα y , δηλαδή μετά τη σχισμή είναι $p_y = p_0$ και

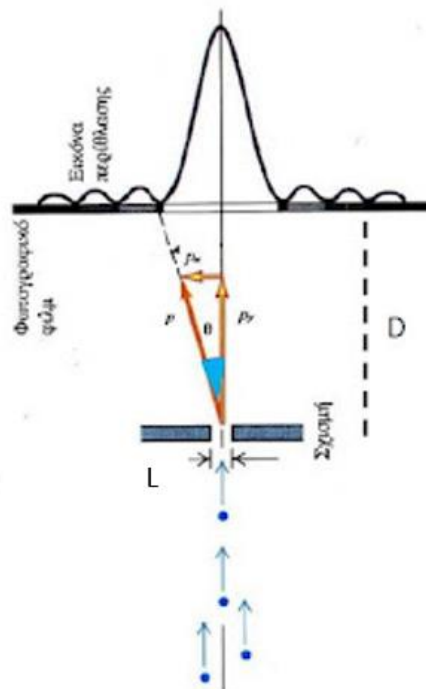
β. Παραμένει το μέτρο της σταθερό δηλαδή είναι $p = p_0$.

Αν ισχύει το (α) δηλαδή είναι $p_y = p_0$, τότε **δεν παραβιάζεται η αρχή απροσδιοριστίας** γιατί καθώς μεταβάλλεται η γωνία θ από -90° έως $+90^\circ$, οι τιμές της συνιστώσας p_x παίρνουν τιμές από $-\infty$ έως $+\infty$ και συνεπώς δεν υπάρχει πάνω όριο στην αβεβαιότητα Δp_x . Όμως στην περίπτωση αυτή το μέτρο της τελικής ορμής είναι μεγαλύτερο από αυτό της αρχικής και συνεπώς **δεν ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας**.

Αν ισχύει το (β) δηλαδή είναι $p = p_0$, **η ενέργεια διατηρείται**. Όμως τότε η συνιστώσα της ορμής Δp_x παίρνει τιμές από $-p_0$ έως $+p_0$ και συνεπώς η μέγιστη απροσδιοριστία στον άξονα x είναι $(\Delta p_x)_{\max} \leq 2p_0$, δηλαδή έχει άνω όριο. Άρα για επιλογή πλάτους σχισμής $L = h/(12\pi p_0)$ είναι

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \leq 2p_0 \cdot h/(12\pi p_0) = h/(6\pi) < h/(4\pi),$$

επομένως **παραβιάζεται η αρχή της απροσδιοριστίας**. Τι συμβαίνει;



Συζήτηση:

α. Προφανώς η αρχή διατήρησης της ενέργειας ισχύει και συνεπώς το **μέτρο της ορμής** παραμένει σταθερό.

$$p = p_0$$

Οι Davisson και Germer μελέτησαν τα ηλεκτρόνια τα οποία έχουν τη μεγαλύτερη ταχύτητα μετά την περίθλαση με το πλέγμα και αυτή είναι κατά μέτρο ίση με την ταχύτητα των ηλεκτρονίων που προσπίπτουν στον κρύσταλλο. Συνεπώς είναι:

$$p_x = p \sin \theta$$

β. Η ορμή δεν διατηρείται ούτε στον άξονα x ούτε στον άξονα y, συμβαίνει μεταβίβαση ορμής από το ηλεκτρόνιο στον κρύσταλλο.

γ. **Τι είναι η αβεβαιότητα Δx και η αβεβαιότητα Δp_x :**

Η κατάσταση ενός σωματιδίου σε μονοδιάστατο πρόβλημα περιγράφεται με την κυματοσυνάρτηση. Όλες οι πληροφορίες περιέχονται σε αυτή την κυματοσυνάρτηση. Έστω η κυματοσυνάρτηση είναι η $\psi(x, t)$. Αν μετρήσω τη θέση του σωματιδίου θα βρω μια τιμή x_0 . Αμέσως μετά τη μέτρηση το σωματίδιο δεν είναι πλέον στην κατάσταση $\psi(x, t)$, είναι στην κατάσταση $\psi'(x) = \delta(x - x_0)$ (κατάρρευση της κυματοσυνάρτησης), που είναι ιδιοκατάσταση της θέσης x. Επίσης αν για το ίδιο σωματίδιο στην ίδια κατάσταση $\psi(x, t)$, μετρήσω πάλι τη θέση x θα προκύψει εν γένει διαφορετική τιμή από την x_0 . Διαθέτουμε ένα μεγάλο πλήθος N (συλλογή) από πανομοιότυπες καταστάσεις $\psi(x, t)$, και μετρώ τη θέση x για την κάθε κατάσταση. Κάνω μια διαμέριση του χώρου των θέσεων σε μικρά διαστήματα και απαριθμώ για κάθε διάστημα ξεχωριστά πόσες φορές η μέτρηση της θέσης ήταν σε αυτό το διάστημα. Το ιστόγραμμα των αποτελεσμάτων θα είναι όμοιο με το τετράγωνο του μέτρου της $\psi(x, t)$, δηλ της $|\psi(x, t)|^2$ (ερμηνεία κυματοσυνάρτησης). Επίσης από τις μετρήσεις υπολογίζω τη μέση τιμή της θέσης $\langle x \rangle$ τη $\langle x^2 \rangle$. Επίσης είναι:

$$\mathbf{H \text{ διασπορά } (\Delta x)^2:} \quad (\Delta x)^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2}{N}$$

Η ποσότητα Δx λέγεται **τυπική απόκλιση** και στην κβαντική φυσική λέγεται και **αβεβαιότητα της θέσης**

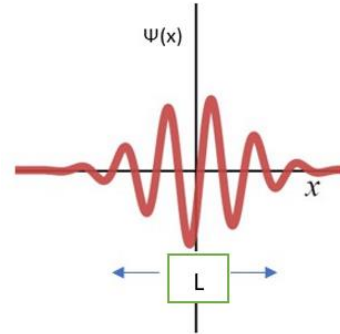
Εντελώς όμοια υπολογίζεται και η **αβεβαιότητα της ορμής** Δp. Δηλαδή μετρώ την ορμή για κάθε σωματίδιο από άλλα N σωματίδια που έχουν την ίδια κυματοσυνάρτηση $\psi(x, t)$, και υπολογίζω τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση.

Επίσης με δεδομένη τη κατάσταση $\psi(x, t)$, και την ερμηνεία του μέτρου της ως αντίστοιχη πιθανότητα μπορούμε με τα μαθηματικά να υπολογίσουμε και την Δx και την Δp.

Συμπέρασμα: Η κατάσταση $\psi(x, t)$ περιέχει την πληροφορία της αβεβαιότητας Δx και της αβεβαιότητας Δp, οι οποίες είναι η τυπική απόκλιση της μέτρησης της θέσης για άπειρα σωματίδια που είναι το κάθε

ένα στην κατάσταση $\psi(x, t)$, και αντίστοιχα είναι η τυπική απόκλιση της μέτρησης της ορμής για άπειρα σωματίδια που είναι το κάθε ένα στην κατάσταση $\psi(x, t)$

δ. Στο πείραμά μας τα ηλεκτρόνια έχουν ορμή πριν τη σχισμή p_0 και κινούνται στον άξονα y (είναι επίπεδα κύματα). Ακριβώς τη στιγμή που βρίσκονται στη σχισμή μια μέτρηση της θέσης θα έδινε τιμή της θέσης x στο διάστημα όσο και το πλάτος της σχισμής L . Άρα η κυματοσυνάρτηση $\psi(x, t)$ μηδενίζεται πέραν των ορίων της σχισμής. Συνεπώς η μορφή της κυματοσυνάρτησης μας πληροφορεί ότι η αβεβαιότητα της θέσης θα είναι



$$\Delta x \leq L.$$

Προσοχή !! δεν κάνω μέτρηση της θέσης ώστε να έχω άλλη κυματοσυνάρτηση της δ - μορφής. Συνεπώς η κυματοσυνάρτηση είναι η $\psi(x, t)$. Όμως με το πέτασμα **αποφασίζω** να μετρήσω την ορμή στον άξονα των x για κάθε ηλεκτρόνιο ξεχωριστά. Κάθε ηλεκτρόνιο μπορούμε να υποθέσουμε ότι τη στιγμή που περνάει από τη σχισμή είναι στην ίδια κατάσταση $\psi(x, t)$, με ένα shift στο χρόνο, χωρίς να αλλάζει η μορφή της, και είναι η συλλογή που αναφέρεται στο γ .

Συμπέρασμα: Για την κυματοσυνάρτηση $\psi(x, t)$, εκτιμώ από την μορφή της την αβεβαιότητα της θέσης Δx , και μετρώ πειραματικά την ορμή Δp . **Έτσι φαίνεται ότι τίθεται το πρόβλημα στα διάφορα συγγράμματα που το διαπραγματεύονται.**

Οι τιμές της ορμής στον άξονα x παίρνουν ακραίες τιμές $+p_0$ και $-p_0$ για γωνίες εκτροπής 90° και -90° . Άρα είναι:

$$(\Delta p_x)_{\max} \leq 2p_0$$

και για επιλογή $L = h/(12\pi p_0)$ προκύπτει

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \leq 2p_0 \cdot h/(12\pi p_0) = h/(6\pi) < h/(4\pi).$$

Όσες φορές ισχυρίστηκε κάποιος ότι παραβιάζεται η αρχή απροσδιοριστίας αποδείχτηκε ότι **δεν έχει τεθεί σωστά το πρόβλημα**. Επειδή το συγκεκριμένο πρόβλημα το διαπραγματεύονται σχεδόν όλα τα βιβλία κβαντικής, βιβλίο αναφοράς είναι η κβαντική του Berkley, το έφερα για προβληματισμό ως προς το τι τίθεται λάθος. Το πρόβλημα το διαπραγματεύονται για μικρές γωνίες εκτροπής και η ποιοτική απόδειξη της αρχής απροσδιοριστίας γίνεται εύκολα και είναι παιδαγωγικά πολύ χρήσιμη.

Νίκος Διαμαντής.