Διδασκαλία της Υδροστατικής: Κάντο όπως ο Νεύτωνας

Άννα Κουμαρά και Παναγιώτης Κουμαράς

(SSR in Depth 388, p.p 7-12)

Λέξεις Κλειδιά: Υδροστατική, Ρευστά, Νεύτωνας

Περίληψη

Η παρούσα εργασία αποτελείται από δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος παρουσιάζεται συνοπτικά το έργο του Νεύτωνα για την υδροστατική, όπως αυτό περιλαμβάνεται στο «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica». Στο δεύτερο μέρος παρουσιάζονται προτάσεις για τη διδασκαλία της υδροστατικής πίεσης στους σημερινούς μαθητές, καθοδηγούμενες από το έργο του Νεύτωνα. Αυτές είναι α) η μη εισαγωγή της έννοιας πίεση μέσω στερεών, β) η απόδειξη της αρχής του Πασκάλ, γ) η εξαγωγή της εξίσωσης που συνδέει την πίεση σε ένα σημείο του υγρού με το βάθος του ($p = \rho g h$) και δ) μια εξήγηση του υδροστατικού παράδοξου.

Τόσο στα εγχειρίδια Φυσικής όσο και στα ερευνητικά περιοδικά για την Εκπαίδευση στις Φυσικές Επιστήμες, το έργο του Νεύτωνα στην υδροστατική συνήθως υποεκπροσωπείται ή ακόμη και αγνοείται. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο θεωρούμε ότι μια περίληψη του έργου του Νεύτωνα είναι απαραίτητη στο πλαίσιο αυτής της εργασίας. Για μια πιο εκτεταμένη μελέτη, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει είτε στο πρωτότυπο έργο του Νεύτωνα (1999, σελ. 687-692) είτε στην περιγραφή του από τον Chalmers (2017, σελ. 149-153). Στην Υδροστατική του, ο Νεύτωνας αποδίδει στην έννοια πίεση χαρακτηριστικά παρόμοια με τα σύγχρονα. Ο Νεύτωνας συνειδητοποίησε ότι η αδυναμία των υγρών (γενικότερα των ρευστών) να αντέξουν σε παραμορφωτικές δυνάμεις είναι το κλειδί για την κατανόηση της υδροστατικής. Λόγω αυτού του εγγενούς χαρακτηριστικού των ρευστών, τα υγρά μετατρέπουν τις δυνάμεις που ασκούνται σε μια περιοχή τους σε δυνάμεις που δρουν εξίσου προς όλες τις κατευθύνσεις σε όλη τη μάζα τους. Τα τρέχοντα εγχειρίδια που εισάγουν την έννοια πίεση μέσω στερεών θα πρέπει να έχουν κατά νου αυτό το χαρακτηριστικό.

Υδροστατική του Νεύτωνα

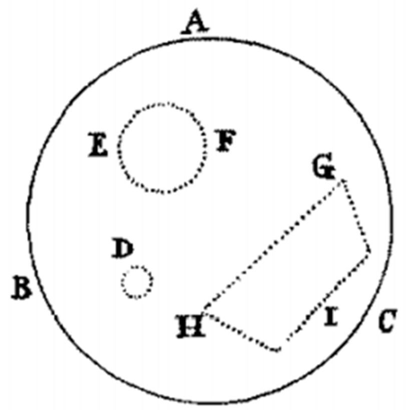
Η πρώτη εκδοχή της υδροστατικής του Νεύτωνα εμφανίζεται στο αδημοσίευτο χειρόγραφό του «De gravitatione», που συντάχθηκε μεταξύ 1665-1668 ή 1684-85 σύμφωνα με άλλους ιστορικούς. Ο Νεύτωνας βελτίωσε το αντίστοιχο έργο των Stevin, Πασκάλ και Μπόιλ, το οποίο πιθανότατα γνώριζε μέσω του έργου του Μπόιλ «Hydrostatical paradoxes made out by new experiments», που δημοσιεύθηκε το 1666 (Chalmers 2017, p.136-138; Chalmers, 2018). Η δεύτερη έκδοση της υδροστατικής του Νεύτωνα εμφανίζεται στο «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica», που δημοσιεύθηκε το 1687, στο τμήμα V του δεύτερου βιβλίου, το οποίο αποτελείται από δύο προτάσεις, XIX και XX, με συνολικό μήκος 6 σελίδων στην έκδοση του 1999 (Newton 1999, p.687-692).

Το τμήμα V ξεκινά με τον ορισμό των ρευστών: «*Ρευστό είναι κάθε σώμα του οποίου τα μέρη υποχωρούν σε οποιαδήποτε δύναμη ασκείται σε αυτό και που υποχωρώντας, κινούνται εύκολα το ένα σε* *σχέση με το άλλο*».» (Newton 1999, p.687). Σημειώνεται ότι ο Νεύτωνας δίνει ένα γενικό ορισμό των ρευστών, αλλά τον χρησιμοποιεί μόνο για τα ασυμπίεστα ρευστά, δηλαδή τα υγρά. Ο Πασκάλ, στο έργο του, εξηγεί ότι τα υδροστατικά φαινόμενα οφείλονται στη «ρευστότητα» των υγρών (Evans 1973, p.6-11), αλλά δεν εξηγεί τι σημαίνει ο όρος «ρευστότητα». Ο Νεύτωνας, με τον ορισμό του, έδωσε ένα συγκεκριμένο νόημα στον όρο.

Ο Νεύτωνας αποδεικνύει την αρχή του Πασκάλ

Στην Πρόταση XIX, ο Νεύτωνας χρησιμοποιεί (Newton 1999, p.687) τον ορισμό του για τα ρευστά μαζί με τον 3ο νόμο της κίνησης για να αποδείξει, σε συνθήκες έλλειψης βαρύτητας, την αρχή του Πασκάλ: «εάν αυξηθεί η πίεση σε μια περιοχή ενός υγρού που ηρεμεί και περικλείεται σε ένα ακίνητο δοχείο με άκαμπτα τοιχώματα, αυτή η αύξηση μεταδίδεται αμετάβλητη σε όλα τα σημεία του υγρού». Στην επισκόπηση των συμπερασμάτων του, τονίζει ότι αυτό οφείλεται στη φύση της ρευστότητας και την ισότητα δράσης και αντίδρασης. Σημειώνεται ότι η αρχή του Πασκάλ διατυπώθηκε από τον Πασκάλ γύρω στο 1654, αλλά δημοσιεύθηκε το 1663, ένα χρόνο μετά το θάνατο του. Ο Πασκάλ την παρουσιάζει ως πειραματικό δεδομένο και δεν παρέχει θεωρητική εξήγηση για αυτό (Evans, 1973, σελ. 6-11).

Η πραγματεία του Νεύτωνα ξεκινά εξετάζοντας μια σφαίρα ασυμπίεστου ρευστού (υγρού) ABC, Εικόνα 1, όπου η ίδια δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας ασκείται κάθετα σε όλα τα σημεία της επιφάνειάς της, προς το κέντρο. Υποθέτει ότι αρχικά η σφαίρα αυτή είναι σε ηρεμία και ότι δεν ασκείται σε αυτήν βαρυτική ή κεντρομόλος δύναμη. Συνοψίζει το συμπέρασμά του ως το 7ο βήμα μιας διαδοχικής σειράς επιχειρημάτων.



Εικόνα 1: Το σχήμα που ο Νεύτωνας χρησιμοποιείσαι για να αποδείξει την Πρόταση XIX (Newton 1850, σελ. 293).

Τα συμπεράσματα του Νεύτωνα για κάθε βήμα περιγράφονται παρακάτω. Ο αναγνώστης που επιθυμεί να δει λεπτομερώς πώς αποδείχθηκαν μπορεί είτε να ανατρέξει στο πρωτότυπο έργο του Νεύτωνα (Newton 1999, p.687-692) είτε στην παρουσίασή του από τον Chalmers (2017, σελ. 149-153) για ευκολότερη κατανόηση.

1. Ο Νεύτωνας καταλήγει στο συμπέρασμα ότι οποιοδήποτε σημείο της σφαίρας παραμένει ακίνητο.

2. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του και το συμπέρασμα από το βήμα 1, αποδεικνύει ότι η πίεση έχει την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία της επιφάνειας μιας τυχαίας υποσφαίρας, π.χ. EF, του υγρού.
3. Χρησιμοποιώντας τον 3ο νόμο του και το συμπέρασμα από το βήμα 2, αποδεικνύει ότι η πίεση σε κάθε σημείο της επιφάνειας κάθε υποσφαίρας είναι ίση για όλες τις υποσφαίρες (π.χ. για EF και D) και ίση με την πίεση στην επιφάνεια της σφαίρας ABC.
4. Χρησιμοποιώντας τον 3ο νόμο του και το συμπέρασμα από το βήμα 3, αποδεικνύει ότι η πίεση που υπάρχει στην επιφάνεια της μεγάλης σφαίρας μεταδίδεται αμετάβλητη σε όλα τα σημεία του υγρού.
5. Ο Νεύτωνας έδειξε ότι το συμπέρασμα από το βήμα 4 για τη σφαιρική μάζα, ισχύει για μια υγρή μάζα οποιουδήποτε σχήματος, όπως, για παράδειγμα, τη μάζα του υγρού που περιέχεται στην κλειστή επιφάνεια GHI στην Εικόνα 1.

Το παραπάνω συμπέρασμα ισχύει για υγρά που περιέχονται σε δοχεία οποιουδήποτε σχήματος: η πίεση σε κάθε σημείο είναι ίση με τη δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας που ασκείται στην επιφάνεια του δοχείου. Σημειώνεται ότι ο Νεύτωνας δεν κάνει σχόλια για το δοχείο, αλλά το λαμβάνει υπόψη στο βήμα 6, όπου καταλήγει:

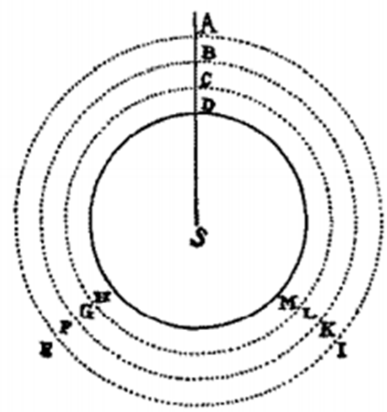
6. "*Επομένως, εάν αυτό το υγρό περικλείεται σε ένα δοχείο που δεν είναι άκαμπτο και δεν πιέζεται εξίσου από όλες τις πλευρές, θα υποκύψει στη μεγαλύτερη πίεση, σύμφωνα με τον ορισμό του υγρού.*"
7. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του για το υγρό και τον 3ο νόμο του, ο Νεύτωνας συνοψίζει την απόδειξη της αρχής του Πασκάλ: «*Και έτσι σε ένα άκαμπτο δοχείο ένα υγρό δεν θα διατηρήσει μια πίεση η οποία θα είναι στη μια πλευρά μεγαλύτερη από ό, τι στην άλλη, αλλά θα υποκύψει σε αυτήν, και θα το κάνει στιγμιαία, καθώς η άκαμπτη πλευρά του δοχείου δεν θα ακολουθήσει το υγρό που υποχωρεί. Και υποχωρώντας [το υγρό], θα πιέσει την αντίθετη πλευρά, και έτσι η πίεση θα τείνει από όλες τις πλευρές προς την ισότητα. Και δεδομένου ότι, μόλις το υγρό προσπαθήσει να υποχωρήσει από το μέρος που πιέζεται περισσότερο, εμποδίζεται από την αντίσταση του δοχείου στην αντίθετη πλευρά, η πίεση θα καταλήξει στην ισότητα από όλες τις πλευρές σε μια στιγμή χωρίς τοπική κίνηση· και στη συνέχεια τα μέρη του υγρού, σύμφωνα με το βήμα 5, θα πιέζουν το ένα το άλλο εξίσου και θα είναι σε ηρεμία το ένα σε σχέση με το άλλο*» (Newton 1999, p.688).

Ο Νεύτωνας αποδεικνύει ότι η πίεση εξαρτάται από το βάθος και υπολογίζει τη δύναμη που ασκείται στο κάτω μέρος του δοχείου.

Στην Πρόταση XX ο Νεύτωνας δείχνει ότι η πίεση σε οποιοδήποτε σημείο μέσα σε ένα υγρό που ηρεμεί είναι ανάλογη μόνο με το βάθος στο οποίο βρίσκεται αυτό το σημείο. Ο Νεύτωνας καταλήγει στην εξάρτηση της πίεσης από το βάθος στην προσπάθειά του να αποδείξει ότι:

> "*Αν κάθε μέρος ενός υγρού που είναι σφαιρικό και ομοιογενές σε ίσες αποστάσεις από το κέντρο και στηρίζεται σε έναν ομόκεντρο σφαιρικό πυθμένα έλκεται προς το κέντρο του συνόλου, τότε ο πυθμένας θα υποστηρίζει το βάρος ενός κυλίνδρου* [υγρού] *του οποίου η βάση είναι ίση με την επιφάνεια του πυθμένα και το ύψος του είναι το ίδιο με εκείνο του υγρού που στηρίζεται πάνω του"* (Newton 1999, σελ. 689), βλέπε Εικόνα 2.

Σημειώνουμε ότι σύμφωνα με αυτό το απόσπασμα, η εσωτερική σφαίρα στην Εικόνα 2 μπορεί να αντιπροσωπεύει τον φλοιό της Γης και τα στρώματα πάνω από αυτήν μπορούν να αντιπροσωπεύουν τους ωκεανούς.



Εικόνα 2: Το σχήμα του Νεύτωνα για να αποδείξει την Πρόταση XX (Newton 1850, σελ. 295).

Για την απόδειξή του χρησιμοποίησε την αρχή του Πασκάλ, την οποία απέδειξε στην Πρόταση XIX. Φαντάστηκε το υγρό να χωρίζεται σε ομόκεντρα σφαιρικά κελύφη AEI, BFK, CGL κτλ. καθένα από τα οποία έχει απειροελάχιστο πάχος. Το εξωτερικό κέλυφος του υγρού, AEI, βαραίνοντας στο υποκείμενο κέλυφος BFK προκαλεί ομοιόμορφη πίεση, p_1, στην εξωτερική επιφάνεια του δεύτερου κελύφους. Αυτή η πίεση μεταδίδεται ως η ίδια δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας στην εσωτερική επιφάνεια αυτού του κελύφους. Στη συνέχεια, στην άνω περιοχή του τρίτου κελύφους θα έχουμε όχι μόνο από την αρχική πίεση, p_1, αλλά από μια πρόσθετη που προκαλείται από το βάρος του υγρού που περιέχεται στο δεύτερο κέλυφος και ούτω καθεξής. Επομένως, στο τελευταίο κέλυφος του υγρού, το οποίο έρχεται σε επαφή με τη στερεά σφαιρική επιφάνεια (βλ. σημείωση πριν από την Εικόνα 2) που υποβαστάζει το υγρό, η πίεση θα έχει αυξηθεί κατά την πίεση (βάρος ανά μονάδα επιφάνειας) λόγω όλων των κελυφών πάνω από αυτό.

Η συνολική δύναμη στην επιφάνεια που συγκρατεί το υγρό βρίσκεται όταν πολλαπλασιάζεται η πίεση με την περιοχή αυτής της επιφάνειας. Σημειώνουμε απλά ότι έχει φτάσει στην απόδειξη του Υδροστατικού παράδοξου, το οποίο εμπειρικά είχε διατυπωθεί αρχικά από τον Stevin (Chalmers 2017, p. 40-41).

Από τα 9 πορίσματα στα οποία καταλήγει ο Νεύτωνας, το δεύτερο είναι το πιο ενδιαφέρον να αναφερθεί σε αυτό το άρθρο:

> «*σε ίσες αποστάσεις από το κέντρο, το μέγεθος της πίεσης είναι πάντα το ίδιο, ανεξάρτητα από το εάν η πιεζόμενη επιφάνεια είναι παράλληλη προς τον ορίζοντα ή κάθετη ή πλάγια, ή αν το υγρό – που συνεχίζεται προς τα πάνω από την πιεζόμενη επιφάνεια - υψώνεται κάθετα κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής ή σέρνεται λοξά μέσω κοιλοτήτων και καναλιών, κανονικών ή εξαιρετικά ακανόνιστων, φαρδιών ή πολύ στενών*» Newton (1999, p.690).

Αυτό μπορεί να ισχύει για οποιαδήποτε σημεία που βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις από το κέντρο ή σε ίσες αποστάσεις από την επιφάνεια. Δεδομένου ότι τόσο η επιφάνεια όσο και το κέντρο είναι ομόκεντροι κύκλοι σε οριζόντια διατομή, Εικόνα 2, τα σημεία που βρίσκονται στην ίδια απόσταση από το κέντρο, βρίσκονται επίσης στο ίδιο βάθος. Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία του υγρού που βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο έχουν την ίδια πίεση, σύμφωνα με τη γνωστή μαθηματική σχέση.

Επιπτώσεις του έργου του Νεύτωνα στη διδασκαλία της Υδροστατικής

Πλεονεκτήματα της αποφυγής εισαγωγής της έννοιας πίεση μέσω στερεών

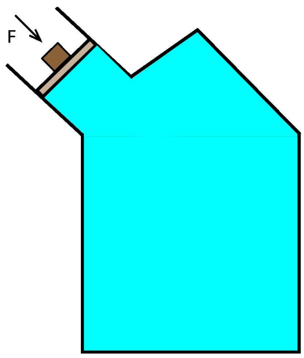
Σε πολλά εγχειρίδια δευτεροβάθμιας ή τριτοβάθμιας εκπαίδευσης (π.χ., Καριώτογλου &; Ψύλλου, 2019; Levesley et al, 2017, σελ.140-141. Hewitt 2010, σελ.229; Johnson 2001, σελ.85. McClelland, 1987), η έννοια πίεση εισάγεται για πρώτη φορά με τη χρήση στερεών σωμάτων. Η βύθιση ή όχι ενός σκιέρ, ανάλογα με το αν φοράει χιονοπέδιλα ή όχι, και η παραμόρφωση του εδάφους λόγω των τακουνιών «στιλέτο» μιας λεπτής κυρίας είναι μερικά παραδείγματα που χρησιμοποιούνται συχνά για την εισαγωγή της έννοιας της πίεσης. Η πινέζα είναι ένα από τα προτιμώμενα παραδείγματα εφαρμογής. Στη συνέχεια, οι συγγραφείς των σχολικών βιβλίων προχωρούν στην εφαρμογή της έννοιας στα υγρά, αναφερόμενοι κατ’ αναλογία (μόνο) στο βάρος τους.

Σε όλη την ιστορία της υδροστατικής, η εστίαση των επιστημόνων στην έννοια «βάρος» βρέθηκε ότι αποτέλεσε εμπόδιο για την ανάπτυξη της έννοιας «πίεση» (Chalmers 2017, σελ.161). Μια παρόμοια εστίαση στην έννοια του βάρους κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας μπορεί επίσης να αποτελέσει εμπόδιο για την κατανόηση της έννοιας πίεση από τους μαθητές. Υπάρχουν πολλά παραδείγματα στη βιβλιογραφία σχετικά με τις δυσκολίες των μαθητών με την υδροστατική (π.χ. Kariotoglou & Psillos, 2019; McClelland, 1987). Θεωρούμε ότι η χρήση αναλογιών από περιβάλλοντα στερεών σωμάτων, οι οποίες επικεντρώνονται στην έννοια του βάρους, μπορεί να βοηθήσει στην κατανόηση της έννοιας της κατανομής δύναμης σε επιφάνεια, αλλά ταυτόχρονα να εμποδίσει την κατανόηση του τρόπου με τον οποίο οι δυνάμεις μεταδίδονται προς όλες τις κατευθύνσεις στα υγρά. Σημειώστε επίσης ότι στα στερεά η κατανομή της δύναμης ανά μονάδα επιφάνειας είναι Τανυστής (δεύτερης τάξης) και όχι αριθμητικό μέγεθος, όπως στα ρευστά. Η πίεση ορίζεται μόνο στα υγρά. Δεδομένου ότι η αρχή του Πασκάλ δεν ισχύει για τα στερεά, δεν υπάρχει υδροστατικό παράδοξο και η μετάδοση δυνάμεων π.χ. από τη μία πλευρά του υδραυλικού πιεστηρίου στην άλλη δεν μπορεί να εξηγηθεί. Το έργο του Νεύτωνα δείχνει ότι η πίεση, πέραν του βάρους του υγρού, σχετίζεται με την ιδιότητα του υγρού να υποχωρεί προς όλες τις κατευθύνσεις όταν ασκείται δύναμη σε μια περιοχή του, και με τον 3ο νόμο της κίνησης. Αυτό μπορεί να εξηγήσει πώς οι δυνάμεις μεταδίδονται προς όλες τις κατευθύνσεις μέσω υγρών και επομένως ο Νεύτωνας «*εξήγησε πώς τα υγρά μπορούν να σπρώξουν γύρω από τις γωνίες*» (Chalmers 2017, p.151).

Απόδειξη της αρχής του Πασκάλ

Στα σύγχρονα εγχειρίδια Φυσικής τόσο για τη δευτεροβάθμια όσο και για την τριτοβάθμια εκπαίδευση, η αρχή του Πασκάλ είτε αναφέρεται εν συντομία (Hewitt 2010, p.238) είτε, το πιο συνηθισμένο, αποδεικνύεται για την ειδική περίπτωση κάτω από κατακόρυφη κυλινδρική (ή κυβοειδή) στήλη υγρού στην επιφάνεια του οποίου αυξάνεται η πίεση (Serway &; Jewett 2014, p.420; Halliday, Resnick & Walker 2011, σελ. 366).

Προτείνουμε να αποδεικνύεται η αρχή του Πασκάλ σύμφωνα με το έργο του Νεύτωνα, δηλ. εφαρμόζοντας τον ορισμό του ρευστού και τον 3ο Νόμο, παρόμοια με το παραπάνω 7ο βήμα, κάτι που δεν έχουμε μέχρι τώρα συναντήσει στη βιβλιογραφία. Έτσι, εάν μια δύναμη F ασκείται σε μια τυχαία περιοχή υγρού που περιέχεται σε κλειστό δοχείο με άκαμπτα τοιχώματα, π.χ. χρησιμοποιώντας ένα έμβολο διατομής S, Εικόνα 3, τότε ασκείται δύναμη ανά μονάδα εμβαδού F/S στο υγρό κάτω από το έμβολο, έχοντας την ίδια κατεύθυνση με την ασκούμενη δύναμη. Σύμφωνα με τον ορισμό του Νεύτωνα, τμήματα του υγρού τείνουν να υποχωρούν και να κινούνται προς όλες τις κατευθύνσεις, πράγμα που σημαίνει ότι ασκείται δύναμη σε όλες τις διαδοχικές στοιχειώδεις επιφάνειες του υγρού και προς όλες τις κατευθύνσεις. Επομένως, σε οποιαδήποτε στοιχειώδη επιφάνεια σε επαφή με τα άκαμπτα τοιχώματα του δοχείου ασκείται δύναμη. Άρα, το υγρό ασκεί δύναμη στο τοίχωμα (δράση) και επομένως ασκείται δύναμη αντίθετης κατεύθυνσης στο υγρό από το τοίχωμα (αντίδραση).



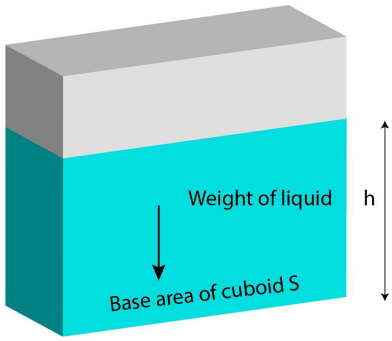
Εικόνα 3: Η αύξηση της πίεσης μεταδίδεται αμείωτη σε όλα τα μέρη του υγρού και προς όλες τις κατευθύνσεις.

Η αντίδραση αναγκάζει το υγρό να τείνει να υποχωρήσει προς το εσωτερικό του δοχείου, πάλι προς όλες τις κατευθύνσεις. Κατά τη διάρκεια της υποχώρησης το υγρό θα συγκρουστεί με όγκους υγρού που τείνουν να έρθουν από άλλες κατευθύνσεις, με αποτέλεσμα την τάση να κινείται προς την κατεύθυνση όπου ασκείται η μικρότερη δύναμη ανά στοιχειώδη επιφάνεια, πιθανώς αλληλεπιδρώντας με τα τοιχώματα κ.λπ. Τέλος, η δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας που ασκείται κάθετα σε ένα επιφανειακό στοιχείο τυχαίου προσανατολισμού που διέρχεται από ένα αυθαίρετο σημείο O του υγρού θα γίνει ίση και στις δύο πλευρές του και ίση με τη δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας που ασκείται από το έμβολο (δηλαδή η αύξηση της πίεση μεταδίδεται παντού), γιατί διαφορετικά το υγρό δεν θα ήταν σε ηρεμία. Αυτός ο μηχανισμός μετάδοσης πίεσης λαμβάνει χώρα με την ταχύτητα του ήχου στο υγρό, δεν συνεπάγεται καμία πραγματική μετατόπιση του υγρού και οφείλεται στη φύση των υγρών, δηλαδή στον τρόπο με τον οποίο μετατρέπουν τις κατευθυνόμενες δυνάμεις που ασκούνται πάνω τους σε ισοτροπικές, και στην αντίδραση των τοιχωμάτων. Με άλλα λόγια, μια διαταραχή, η αύξηση της πίεσης, μεταδίδεται προς όλες τις κατευθύνσεις, αντανακλάται στα τοιχώματα και αποσβένεται όταν η πίεση είναι ίση σε όλα τα σημεία του περίκλειστου υγρού.

Απόδειξη της εξίσωσης $\boldsymbol{p = \rho g h}$

Αυτή η εξίσωση συνήθως αποδεικνύεται λαμβάνοντας υπόψη έναν κυβοειδή όγκο υγρού και υπολογίζοντας κάτω από αυτόν το λόγο $p = \frac{weight\ of\ liquid\ of\ the\ cuboid\ volume}{rectagular\ base\ area\ of\ the\ cuboid}$. Έτσι, η πίεση σε κάθε σημείο της κολώνας του υγρού, ύψους h, στη βάση ενός κυβοειδούς όγκου, με επιφάνεια S , Εικόνα 4, είναι:

$p = \frac{weight\ of\ liquid\ of\ the\ cuboid\ volume}{rectagular\ base\ area\ of\ the\ cuboid} = \frac{\rho g(S.h)}{S} = \rho g h$ (Hewitt 2010, σελ.230)

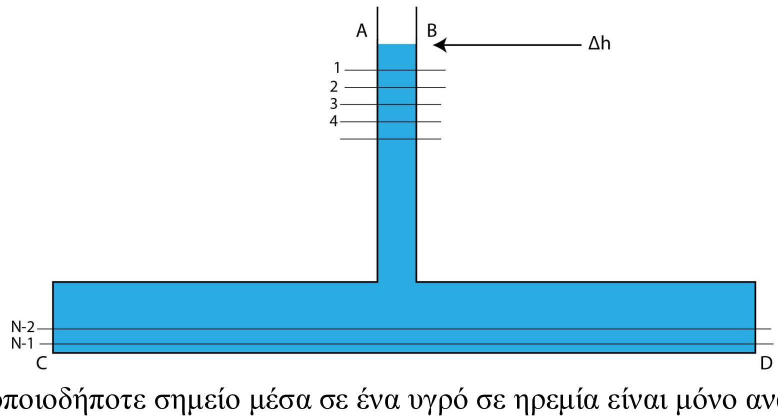


Εικόνα 4: Υδροστατική πίεση σε βάθος h από την επιφάνεια του υγρού

Η παραπάνω απόδειξη έχει το μειονέκτημα ότι δεν μπορεί η σχέση $p = \rho g h$ να δειχτεί στους μαθητές αν το υγρό πάνω από την επιφάνεια που ζητείται ο υπολογισμός της πίεσης, «*σέρνεται λοξά μέσω κοιλοτήτων και καναλιών, κανονικών ή εξαιρετικά ακανόνιστων, φαρδιών ή πολύ στενών*», όπως έγραψε ο Νεύτωνας.

Αντί να χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω πλαίσιο, προτείνουμε να εξάγουμε την εξίσωση χρησιμοποιώντας την αρχή του Πασκάλ σύμφωνα με την απόδειξη του Νεύτωνα:

Φανταστείτε ένα δοχείο ABCD, γεμάτο με ένα υγρό όπως στην Εικόνα 5. Το υγρό διαιρείται σε οριζόντιες στιβάδες 1,2,3..., N-1, N, καθεμία από τις οποίες έχει απειροελάχιστο πάχος ($\Delta h \to 0$).



Εικόνα 5: Η πίεση σε οποιοδήποτε σημείο μέσα σε ένα υγρό σε ηρεμία είναι μόνο ανάλογη με το βάθος αυτού του σημείου.

Η πίεση, λόγω του βάρους του υγρού, στο κάτω μέρος του στρώματος 1 είναι:

$$p_1 = \frac{weight\ of\ layer1}{base\ surface\ area\ of\ layer1} = \frac{(S\ \Delta h)\rho g}{S} = \rho g \Delta h$$

Ακολουθώντας την απόδειξη του Νεύτωνα δεν αναφέρουμε την ατμοσφαιρική πίεση στην επιφάνεια του υγρού, η οποία μεταφέρεται σε κάθε μέρος του.

Σύμφωνα με την αρχή του Πασκάλ αυτή η πίεση p_1 μεταφέρεται σε κάθε σημείο του στρώματος 2. Ομοίως, στο κάτω μέρος του στρώματος 2, η πίεση θα είναι ίση με την πίεση p_1, αυξημένη από την πίεση λόγω του βάρους του υγρού που περιέχεται στο στρώμα 2. Αυτή είναι:

$$p_2 = p_1 + \frac{weight\ of\ layer2}{base\ surface\ area\ of\ layer2} = p_1 + \frac{(S\ \Delta h)\rho g}{S} = p_1 + \rho g \Delta h = \rho g(2\Delta h)$$

Προχωρώντας παρόμοια για τα επόμενα στρώματα υγρού, η πίεση στο *νιοστό* στρώμα του υγρού, το οποίο αγγίζει τον πυθμένα του δοχείου, που είναι επίσης η πίεση στο ζητούμενο βάθος h, είναι ίση με

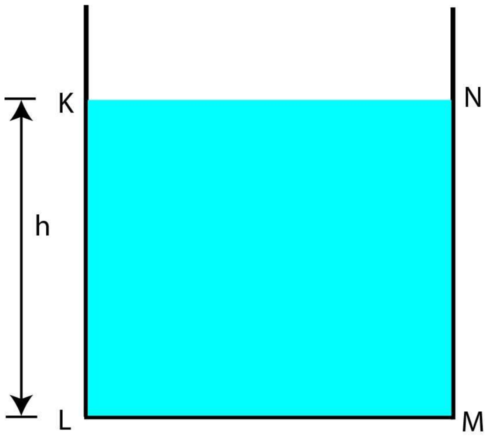
$$p_N = \rho g(N \cdot \Delta h) = \rho g h$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα του δοχείου που χρησιμοποιείται στην Εικόνα 5, μπορεί εύκολα να γίνει κατανοητό ότι η επιφάνεια κάθε στρώματος δεν παίζει κανένα ρόλο στον υπολογισμό της πίεσης, δεδομένου ότι είναι η ίδια επιφάνεια που χρησιμοποιείται τόσο στον αριθμητή, όσο και στον παρονομαστή, επομένως ακυρώνεται κατά τον υπολογισμό της πίεσης. Η ίδια στρατηγική υπολογισμού θα ίσχυε για ένα δοχείο τυχαίου σχήματος "*υπό την προϋπόθεση ότι ο αριθμός των κελυφών αυξάνεται και το πάχος τους μειώνεται επ' αόριστον*" (Newton 1999, p.689). Θεωρούμε ότι η αρχή του Πασκάλ (καθώς και ο 3ος Νόμος) θα βοηθούσαν επίσης τους μαθητές να εξηγήσουν το Υδροστατικό Παράδοξο.

Οι παραπάνω δύο προτάσεις συνεπάγονται ότι μετά την εισαγωγή της έννοιας πίεση διδάσκεται πρώτα η αρχή Πασκάλ και ακολουθεί η εισαγωγή του $p = \rho g h$, *σε αντίθεση με τη συνήθη παρουσίαση στα σχολικά εγχειρίδια, όπου* διδάσκεται πρώτα η εξίσωση $p = \rho g h$ και στη συνέχεια η αρχή του Πασκάλ (π.χ., Hewitt 2010, *p.230*, 238; Serway &; Jewett 2014, σελ.419, 420. Halliday, Resnick & Walker 2011, σελ.363, 366). Σημειώνεται ότι σε σύγχρονα εγχειρίδια (Etkina, Planinsic και Van Heuvelen, 2019, σελ.389-393) η αρχή του Πασκάλ εισάγεται πριν από την εξίσωση $p = \rho g h$.

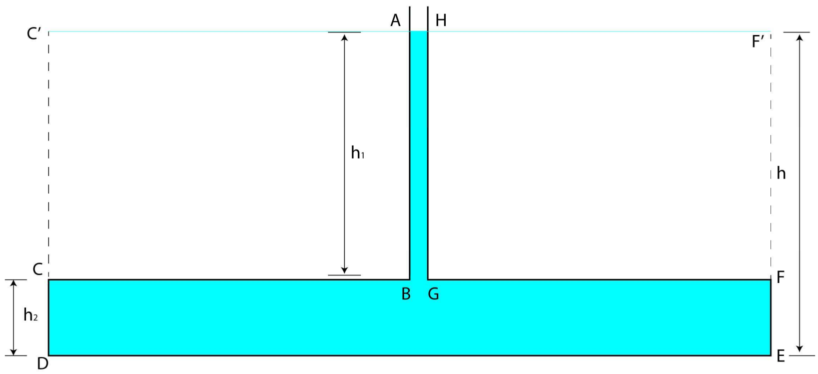
Εξήγηση του υδροστατικού παράδοξου

Η δύναμη F που ασκείται στον πυθμένα LM του δοχείου KLMN στην Εικόνα 6 είναι ίση με $F = pS = \rho g h S = \rho g V$, όπου S είναι η επιφάνεια του πυθμένα και V είναι ο όγκος του υγρού, δηλαδή η δύναμη είναι ίση με το βάρος του υγρού που περιέχεται στο δοχείο. Αυτό είναι κάτι προφανές για τους μαθητές.



Εικόνα 6: Η δύναμη που ασκείται στο κάτω μέρος είναι ίση με το βάρος του υγρού που περιέχεται.

Αυτό που είναι ιδιαίτερα αντιφατικό για τους μαθητές είναι το γεγονός ότι η ίδια εξίσωση $F = pS$ χρησιμοποιείται ανεξάρτητα από το σχήμα του δοχείου, και επομένως η δύναμη που ασκείται στο κάτω μέρος του δοχείου ABCDEFGH, Εικόνα 7, αν το ύψος του είναι h και η κάτω επιφάνεια του S, είναι ίση με τη δύναμη που ασκείται στο κάτω μέρος του δοχείου KLMN της Εικόνας 6. (Προφανώς, το δοχείο ABCDEFGH είναι μέρος του σκάφους KLMN).



Εικόνα 7: Το υδροστατικό παράδοξο

Η προσέγγισή μας μπορεί να προσφέρει μια ποιοτική ερμηνεία αυτού του αντιφατικού αποτελέσματος, χρησιμοποιώντας την αρχή του Πασκάλ και τον 3ο νόμο του Νεύτωνα, ως εξής: Η πίεση στο οριζόντιο επίπεδο BG, στη βάση της υγρής στήλης ABGH, είναι $p_1 = \rho g h_1$. Αυτή η πίεση, σύμφωνα με την αρχή του Πασκάλ, μεταδίδεται στο πρώτο ανώτερο στοιχειώδες υγρό στρώμα της περιοχής CDEF. Η δύναμη που ασκείται από το υγρό στην περιοχή CF είναι $F_1 = p_1 S = \rho g h_1 S$[1], η οποία είναι αριθμητικά ίση με το

[1] Αυτό ισχύει με την προϋπόθεση ότι η διατομή BG της υγρής στήλης ABGH είναι πολύ μικρή σε σχέση με το στερεό μέρος της επιφάνειας CF, την οροφή του πλατιού δοχείου. Αν αυτό δεν ισχύει θα έχουμε μια δύναμη οφειλόμενη στην αντίδραση της οροφής και μια δύναμη κάτω από την υγρή στήλη, οφειλόμενη σε αυτήν. Το άθροισμα αυτών των δυνάμεων θα είναι $F_1 = p_1 S = \rho g h_1 S$

βάρος του υγρού στο φανταστικό δοχείο C΄CFF΄ (προφανώς το δοχείο C'CFF΄ και το δοχείο ABCDEFGH μαζί σχηματίζουν το δοχείο KLMN). Σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Νεύτωνα, η περιοχή CF του δοχείου ασκεί στο υγρό δύναμη ίσου μέτρου, με φορά προς τα κάτω. Επομένως, στον πυθμένα DE του δοχείου ασκείται το βάρος του υγρού που περιέχεται στο CDEF συν την αντίδραση από την περιοχή CF – το οποίο είναι ίσο με το βάρος του υγρού στο δοχείο C΄CFF΄, δηλαδή το συνολικό βάρος του υγρού που περιέχεται στο δοχείο KLMN. Οι αντιδράσεις από τα πλευρικά τοιχώματα CD και EF δεν λαμβάνονται υπόψη, καθώς αλληλοεξουδετερώνονται.

Συμπέρασμα

Στην παρούσα εργασία, αναδεικνύουμε το παραμελημένο – στα εγχειρίδια Φυσικής και στα περιοδικά για την Εκπαίδευση στις Φυσικές Επιστήμες – έργο του Νεύτωνα στην υδροστατική. Αυτή η εργασία μπορεί να καθοδηγήσει τους σχεδιαστές προγραμμάτων σπουδών, τους συγγραφείς σχολικών βιβλίων (ακόμη και τους εκπαιδευτικούς που θέλουν να εμπλουτίσουν τις γνώσεις τους σχετικά με την πίεση και να τους βοηθήσουν, εάν έχουν την ευκαιρία) να εισαγάγουν την έννοια πίεση μόνο στα ρευστά, αποφεύγοντας τη χρήση αναλογιών που εστιάζουν στην έννοια του βάρους (κατανομή του βάρους ενός στερεού σε μια επιφάνεια) και καθιστούν δύσκολη την κατανόηση της μετάδοσης δυνάμεων προς κάθε κατεύθυνση μέσω των υγρών.

Η ποιοτική απόδειξη της αρχής Πασκάλ, μέσω του ορισμού του Νεύτωνα για το ρευστό και του 3ου νόμου της κίνησης, μπορεί να δώσει μια ποιοτική εξήγηση του υδροστατικού παράδοξου. Η πλούσια βιβλιογραφία στα περιοδικά για την Εκπαίδευση στις Φυσικές Επιστήμες δείχνει τη δυσκολία των μαθητών να κατανοήσουν το υδροστατικό παράδοξο. Θεωρούμε ότι η εισαγωγή πίεσης μέσω στερεών δεν είναι ευκολότερη προσέγγιση, αλλά λανθασμένη, γεγονός που συμβάλλει στη δυσκολία των μαθητών να κατανοήσουν υδροστατικά φαινόμενα (ιδιαίτερα το υδροστατικό παράδοξο). Ένα στερεό αντικείμενο δεν μπορεί να ασκήσει συνολική δύναμη μεγαλύτερη από το βάρος του και δεν ασκεί οποιαδήποτε δύναμη στα κατακόρυφα πλευρικά τοιχώματα της οριζόντιας δεξαμενής στην οποία βρίσκεται ή στην κορυφή της δεξαμενής (αν ένας σωλήνας με στερεό είναι πάνω από αυτήν). Ο Πασκάλ έδειξε ότι δεν υπάρχει υδροστατικό παράδοξο όταν το νερό είναι παγωμένο. Κανένα μηχάνημα που η λειτουργία του βασίζεται στο υδραυλικό πιεστήριο, δηλαδή υδραυλικά φρένα, ανελκυστήρες αυτοκινήτων, υδραυλικοί γρύλοι και περονοφόρα ανυψωτικά μηχανήματα, που συνήθως απεικονίζονται στα σχολικά εγχειρίδια, δεν λειτουργεί αν τα υγρά τους παγώσουν.

Σημειώνεται ότι υπάρχει πλούσιο έργο στη βιβλιογραφία για την εξήγηση του υδροστατικού παράδοξου, σε αντίθεση με την εξήγηση της αρχής Πασκάλ. Για να καταλήξουμε, προτείνουμε ότι η ακολουθία παρουσίασης του Νεύτωνα: εισαγωγή της έννοιας της πίεσης, αρχή του Πασκάλ, εισαγωγή της εξίσωσης $p = \rho g h$, υδροστατικό παράδοξο, θα μπορούσε να καθιερωθεί ως ακολουθία παρουσίασης στα σχολικά εγχειρίδια.

References

Chalmers, A. 2018. How Pressure Became a Scalar, Not a Vector. *Phys. Perspect.* **20,** 165–179. https://doi.org/10.1007/s00016-018-0221-3

Chalmers, A., 2017. One Hundred Years of Pressure: Hydrostatics from Stevin to Newton. Dordrecht: Springer

Etkina,E., Planinsic, G., Van Heuvelen, A., 2019 (Second Edition). College Physics: Explore and Apply. New York: Pearson.

Evans, A. (ed) 1973. The Physical treatises of Pascal. New York: Octagon Books.

Halliday, D., Resnick, R., Walker, J., 2011. Fundamentals of physics. Hoboken: John Wiley & Sons

Hewitt, P., 2010. Conceptual Physics (11th edition). Pearson/Addison Wesley.

Johnson, K., 2001. Physics for You. Cheltenham: Nelson Thornes Ltd.

Kariotoglou, P.; Psillos, D. 2019. Teaching and Learning Pressure and Fluids. Fluids, *4*, 194. https://doi.org/10.3390/fluids4040194

Levesley, M., Johnson, P., Gray, S., Kearsey S. 2017. Exploring Science. How Science Works 9. Pearson / Longman

McClelland, J.A.G., 1987. Pressure points. Phys. Educ. 22, 107-109

Newton, I. 1999. The principia: Mathematical principles of natural philosophy, ed. I.B. Cohen and A. Whitman. Berkeley: University of California Press.

Newton I. (1850). Newton's Principia. The Mathematical principles of natural philosophy, translated by Andrew Motte, edited by Chittenden, M.A. Daniel Adee, 45 Liberty Street, New York.

Serway, R., Jewett, J., 2014. Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics. Boston: Brooks/Cole