

Προσδιορισμός Μαθηματικής Σχέσης Μεγεθών από τα Πειραματικά Δεδομένα

Κωνσταντίνος Παπαφυλάκης

21/1/2024

Για να προσδιορίσετε τη μαθηματική σχέση μεταξύ δύο μεγεθών από τις πειραματικές μετρήσεις, ακολουθήστε τα παρακάτω βήματα.

- 1) Κάντε έναν πίνακα με τα πειραματικά δεδομένα.
- 2) Ορίστε τους περιορισμούς για συγκεκριμένες τιμές των δεδομένων η αβεβαιότητα των οποίων είναι απειροελάχιστη.
- 3) Κάντε τη γραφική παράσταση, χρησιμοποιώντας κατάλληλο λογισμικό (π.χ. SciDAVis, Excel).
- 4) Ταυτοποιήσετε 2 ή 3 πιθανές γενικές μορφές της συνάρτησης από τη γραφική παράσταση. Οι πιο βασικές συναρτήσεις που συναντώνται είναι:

i) $y = ax + b$

ii) $y = ax^b$

iii) $y = ae^{bx}$ (ή $y = a10^{bx}$)

iv) $y = a \ln(x) + b$

v) $y = A \sin(cx) + B \cos(dx)$

vi) $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots a_nx^n$

vii) $y = \frac{ax}{x+b}$

viii) $y = ae^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}}$

ix) $y = a \tan(bx)$

- 5) Για να προσδιορίσετε τις σταθερές των 2 ή 3 πιθανών εξισώσεων χρησιμοποιήστε 2 μεθόδους ανάλογα τη συνάρτηση:

- Μέθοδος των Ελάχιστων Τετραγώνων (M.E.T.): η καλύτερη προσέγγιση για τον υπολογισμό των σταθερών A και B στη γραμμική σχέση της μορφής $Y = A + Bx$, με βάση τα δεδομένα. Εφαρμόζεται για τις συναρτήσεις **i,ii,iii,iv** υπό τη μορφή:

i) $y = ax + b$ για $b \neq 0$ (όπου $A = b$ και $B = a$)

ii) $\log(y) = \log(a) + b \log(x)$ (όπου $A = \log(a)$, $B = b$, $Y = \log(y)$, $X = \log(x)$)

iii) $\log(y) = \log(a) + bx$ (όπου $A = \log(a)$, $B = b$, $Y = \log(y)$)

iv) $y = a \ln(x) + b$ για $b \neq 0$ (όπου $A = b$, $B = a$, $X = \ln(x)$)

- Μοντέλα Παλινδρόμησης: χρησιμοποιείται σε μη γραμμικές συναρτήσεις οι οποίες δεν μπορούν να γίνουν γραμμικές υπό κάποια άλλη μορφή έτσι ώστε να χρησιμοποιηθεί η MET. Με το κατάλληλο λογισμικό (π.χ. SciDAVis, Excel), με βάση τα δεδομένα, προσδιορίζεται η καλύτερη καμπύλη για κάθε τύπο καμπύλης της συνάρτησης (πολυωνυμική, εκθετική, γραμμική, Gauss, Michaelis κτλ.) Εφαρμόζεται για τις συναρτήσεις **i** ($y =$

***ax*), *ii* ($y = ax^b + c$), *iii* ($y = a10^{bx}$ μόνο), *iv* ($y = a\ln(x)$), *v*, *vi*, *vii*, *viii*, *ix*.**

- 6) Προσδιορίστε για κάθε μία από τις πιθανές συναρτήσεις τις αντίστοιχες σταθερές μαζί με το αντίστοιχο σφάλμα. Αν για τη συνάρτηση πρέπει να χρησιμοποιήσετε τη M.E.T., για να υπολογίσετε τις σταθερές A και B (εδώ αναφέρονται ως a και b), περιλαμβάνοντας το αντίστοιχο σφάλμα, χρησιμοποιήστε στο Wolfram Mathematica τον ακόλουθο κώδικα:

```
(*Createatableofexperimentalvalues*) data = {{x1,y1},{x2,y2},...{x1,y1}};
(*Calculatetheaandbcoefficients*)
{x,y} = Transpose[data];
n = Length[data];
sumX = Total[x];
sumY = Total[y];
sumXY = Total[x * y];
sumX2 = Total[x^2];
sumY2 = Total[y^2];
meanX = Mean[x];
meanY = Mean[y];

a = (sumX2 * sumY - sumX * sumXY)/(n * sumX2 - sumX^2);
b = (n * sumXY - sumX * sumY)/(n * sumX2 - sumX^2);

SX = sumX2 - n * meanX^2;
SY = sumY2 - n * meanY^2;
SXY = sumXY - n * meanX * meanY;

da = Sqrt[((SX * SY - SXY^2) * (SX + n * meanX^2))/((n - 2) * n * SX^2)];
db = Sqrt[(SX * SY - SXY^2)/((n - 2) * SX^2)];

(*Print the results with the errors*)
Print[a = ,a,±,da];
Print["b = ",b," ± ",db];
```

Αν για τη συνάρτηση πρέπει να χρησιμοποιήσετε το αντίστοιχο μοντέλο παλινδρόμησης στο κατάλληλο λογισμικό (π.χ. SciDAVis). Μέσω του λογισμικού μπορεί να βρεθεί από την καμπύλη απευθείας, άμεσα η εξίσωση της συνάρτησης μαζί με το αντίστοιχο σφάλμα.

- 7) Ελέγξτε για κάθε πιθανή συνάρτηση αν ισχύουν οι περιορισμοί που τέθηκαν στο 2ο βήμα. Για τις πιθανές συναρτήσεις που δεν είναι έγκυροι οι περιορισμοί, απορρίψτε τες και καταλήξτε στη συνάρτηση που είναι συνεπής με τους περιορισμούς. Αν δε ταιριάζει καμία σταθερά με τους περιορισμούς κάντε μικρές τροποποιήσεις στην εξίσωση της συνάρτησης όπως η προσθήκη μια επιπλέον σταθεράς έτσι ώστε να ισχύουν οι περιορισμοί. Επιπλέον, στο λογισμικό με τα μοντέλα παλινδρόμησης υπάρχει η τιμή R^2 η οποία όσο περισσότερο προσεγγίζει την τιμή 1, τόσο καλύτερα ταιριάζει η συνάρτηση στα δεδομένα.